MS Versión 1.6/160519

X

COSMOLOGÍA RELATIVISTA: LOS MODELOS DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER

M. Santander

Departamento de Física Teórica, Universidad de Valladolid

INDICE

> Podría estar encerrado en una cáscara de nuez . . . y sentirme Rey de un Universo infinito. William Shakespeare, en *Hamlet* ($\approx$ 1600)

1. El universo a gran escala en la teoría de la gravitación de Einstein

A nuestra escala antropocéntrica, en el rango de tamaños comprendido entre 1mm y 1km lo que observamos a nuestro alrededor no aparece como homogéneo ni como isótropo. Esto es una completa obviedad. Tampoco lo aparece a escala del sistema solar completo, 10^9km $\approx 10^{-4}$al (al indica un año-luz, del orden de 10^{13}km). Las estrellas individuales se agrupan en Galaxias, cada una de las cuales contiene del orden de 10^{11} estrellas, separadas entre sí por distancias del orden de 1al. El tamaño de las Galaxias es del orden de 10^5al y están separadas de las Galaxias vecinas por distancias del orden de 1Mpc (pc indica parsec, la unidad habitual de distancia para las grandes escalas: 1pc $=$ 3,26 al). A esta escala de las Galaxias, el Universo tampoco aparece homogéneo ni isótropo; se estima en 10^{11} el número de galaxias en el universo visible. La siguiente escala es la de los cúmulos globulares, que son agrupaciones de galaxias con un tamaño del orden de 10Mpc; los cúmulos, de los que se conocen unos $4 \cdot 10^4$ están separados unos de otros por distancias del orden de 50Mpc, y la distribución registrada de los cúmulos globulares se va acercando, a esa gran escala y sin mirar a las escalas inferiores, a la homogeneidad y a la isotropía. La escala de las mayores estructuras conocidas es la de los supercúmulos, cuyo tamaño es del orden de 10^2Mpc. A esta escala, los datos observacionales sugieren una homogeneidad e isotropía mucho mejor que en las escalas inferiores. Nuestro viaje acaba al llegar al tamaño del universo actualmente observable, del orden de unos 15Gpc.

- comentario 10.1. Este valor, 15Gpc es aproximadamente unos $5 \cdot 10^{26}$m. Traducido a años luz es del orden de unos 50Gal. Como es sabido (y conviene conservarlo en mente) 1 año contiene aproximadamente $\pi \cdot 10^7$s, así que el tamaño del universo, expresado en segundos luz es del orden de $16 \cdot 10^{17}$s. Este valor deberá compararse con la edad del Universo, de la que hablaremos luego.

El primer intento de explorar la estructura del Universo a gran escala empleando la teoría de la gravitación de Einstein data de 1917, y fue obra de Einstein, seguido por muchas elaboraciones posteriores, hasta que a finales de la década de 1930 (con un importante elemento nuevo que ha entrado en escena en los últimos años del Siglo XX) la base *teórica* de la Cosmología observacional quedó establecida en su forma actual, la que vamos a ver en estas notas.

Este logro solamente es posible tras adoptar hipótesis extremadamente simplificadoras, que han conllevado un impresionante ejercicio de modestia que conviene poner en su debida perspectiva. La Tierra deja de ser el centro del Universo con Copérnico; el hombre deja su (ridículo) cetro de 'rey de la creación' con Darwin para pasar a ser otro eslabón en la historia de la evolución, y el sistema solar deja de ser el centro del Universo para verse a partir de Einstein y Hubble como lo que es, un sistema vulgar, orbitando alrededor de una estrella muy corriente (de las que hay del orden de 10^{11} en cada galaxia), en una de las innumerables galaxias (de las que hay del orden de 10^{11} en el universo visible).

La hipótesis simplificadora que permite plantear, estudiar y resolver exactamente un modelo matemático de la estructura y evolución del Universo se llama *Principio Cosmológico*. Consiste en afirmar que:

> Principio Cosmológico: todos los observadores fundamentales ven la misma cosmohistoria, o, enunciado en otras palabras, desde el punto de vista de los observadores fundamentales, el Universo aparece como espacialmente homogéneo e isótropo.

Enseguida comentaremos los ingredientes esenciales de este principio, pero por ahora hay que indicar que por su propio contenido y formulación, se trata de un principio que no puede —ni con toda probabilidad podrá nunca— ser sometido a comprobación *directa*. Sin embargo, ese principio conduce a un gran número de consecuencias importantes, que sí que admiten verificación experimental. Esto es, aunque el Principio Cosmológico no sea directamente verificable —ni falsable—, no por ello debemos concluir que la Cosmología no es Física pues las consecuencias que de tal principio se derivan se prestan a verificación observacional y a falsación, como el criterio de Popper exige.

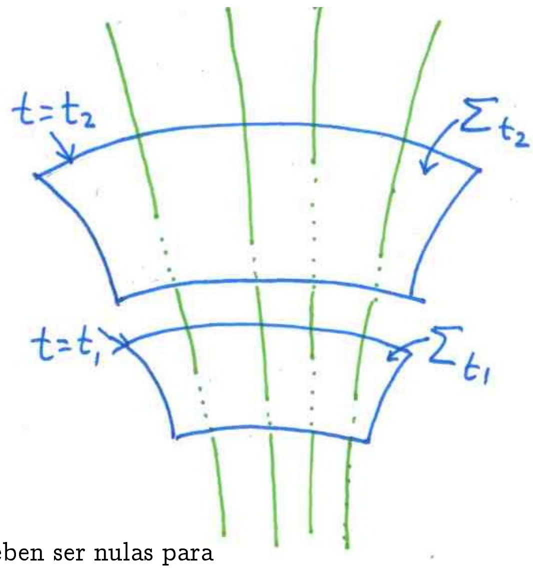
La idea del Principio Cosmológico es contemplar el Universo a una escala espacial muy muy muy grande, a la cual las inhomogeneidades y anisotropías existentes a escalas menores dan paso a *homogeneidad e isotropía promedio* con precisión cada vez mejor. Homogeneidad e isotropía son relativas a un observador, de manera que el Principio Cosmológico requiere de una familia de observadores, que se llaman *fundamentales* y que están determinados por la condición de que la materia en su entorno cosmológico (esto es, su propia Galaxia y/o las Galaxias vecinas) está aproximadamente en reposo.

• COMENTARIO 10.2. Por supuesto, las Galaxias vecinas pueden tener pequeños movimientos relativos al observador, llamadas movimientos peculiares. Andrómeda está actualmente acercándose a la Vía Lactea; este movimiento es el ejemplo más cercano de tal movimiento peculiar. Estos pequeños movimientos peculiares se suponen 'corregidos' para que desde el punto de vista de los observadores fundamentales la materia cercana aparezca en promedio en reposo (insisto, salvo estas pequeñas irregularidades que a muy gran escala resultan ser despreciables).

Cada observador fundamental escoge y asigna coordenadas. Hay un tipo particular de sistemas de coordenadas especialmente bien adaptadas para describir la estructura a gran escala del Espacio-Tiempo. Como es habitual, hay una coordenada temporal y tres coordenadas espaciales.

La coordenada temporal adaptada para describir un Espacio-Tiempo en el que rige el principio cosmológico será el tiempo propio medido por cada observador fundamental. A esta coordenada la llamaremos *tiempo cosmológico*, y la denotaremos por t. Esta coordenada está definida salvo una elección de origen, que de momento dejaremos sin fijar.

• COMENTARIO 10.3. Luego veremos que hay un origen 'natural', que consiste en tomar $t = 0$ en el Big Bang.



A cada valor de t está asociada una (hiper)superficie 'de simultaneidad', que es el *'espacio cosmológico en cada instante cosmológico'*. En este espacio, los observadores fundamentales verán en reposo la materia/energía cercana, y por lo tanto, al no haber movimiento para esta materia/energía, su distribución quedará caracterizada completamente por *su densidad y su presión*, ambas referidas a un sistema de referencia en el que esa materia está en reposo; se trata por lo tanto de una *densidad y presión propias* en el sentido que sea da al término *propio* en Relatividad.

Como el Principio Cosmológico establece que para los observadores fundamentales el Espacio es isótropo, la presión (que en general *podría* ser diferente en diferentes direcciones) debe ser en nuestro caso necesariamente isótropa. Y como para los observadores fundamentales el Espacio es homogéneo espacialmente, tanto la densidad de energía como la presión deben ser *espacialmente* uniformes en todo el espacio. En cuanto a las restantes componentes del tensor de energía-esfuerzo deben ser nulas para los observadores fundamentales, ya que lo contrario violaría el Principio Cosmológico.

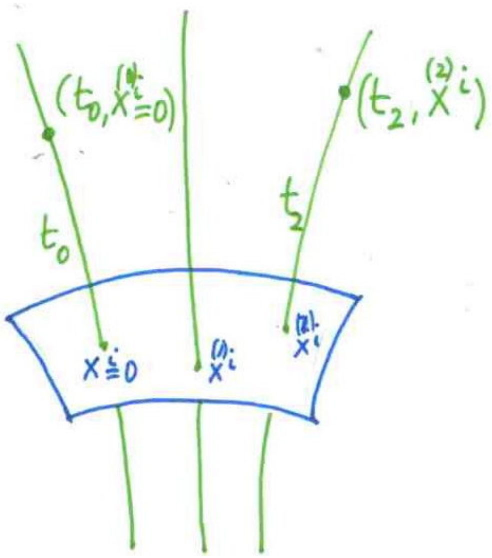
Por lo tanto, la densidad de energía y la presión isótropa son las únicas fuentes posibles del campo gravitatorio para un Universo en el que rija el Principio Cosmológico. Ambas fuentes podrán depender exclusivamente del tiempo cosmológico t, pero *espacialmente* deben ser uniformes en todo el espacio.

La familia de observadores fundamentales son en cierto modo, —a nivel cosmológico y para un espacio-tiempo que satisfaga el Principio Cosmológico—, los análogos a la familia de observadores en reposo desde el punto de vista de un sistema de referencia inercial en Relatividad especial: por cada punto del "espacio en un instante" pasa precisamente un observador de la familia.

1.1. Elección de coordenadas 'cosmológicas'

La elección de coordenadas adecuadas al problema es el paso previo a la consideración de las ecuaciones de Einstein para la descripción del espacio-tiempo a nivel cosmológico, esto es, para delimitar las formas posibles de la correspondiente métrica.

Estas coordenadas adaptadas se escogen usando el principio cosmológico. Antes hemos mencionado la coordenada temporal t que vamos a usar: es el tiempo propio de cada uno de los observadores fundamentales (que a lo largo de su historia describe la evolución temporal). Un sistema de coordenadas de éste tipo se denomina 'síncrono'.



Aparte son necesarias tres coordenadas espaciales, que se escogen dentro de un tipo de coordenadas llamadas de tipo 'comóvil' o cosmológico. Estas coordenadas comóviles se construyen de la siguiente manera: Se escoge un observador fundamental particular (la elección es irrelevante en vista del principio cosmológico) y se escoge sobre su línea de universo un suceso determinado por un 'instante cosmológico de referencia' t_{ref}, que determina el 'espacio cosmológico en ese instante' $\Sigma_{t_{ref}}$ como la hipersuperficie (género espacio) por el suceso escogido y que es ortogonal a *todos* los observadores fundamentales. En esta variedad tridimensional (que deberemos visualizar como 'el espacio cosmológico en un instante t_{ref}) se escogen coordenadas espaciales x^i a nuestra conveniencia.

Una vez hecho esto, se extiende esa asignación de coordenadas a todo el espacio-tiempo. Por cada punto del 'espacio $\Sigma_{t_{ref}}$ en el instante t_{ref}' pasa un solo observador fundamental, cuyo reloj propio marca precisamente t_{ref} en ese instante. Sean x^i las coordenadas espaciales de ese punto, vistas como coordenadas en el espacio de simultaneidad $\Sigma_{t_{ref}}$. Asignamos ahora coordenadas en todo el Espacio-Tiempo de la siguiente manera: Por cada suceso A del Espacio-Tiempo pasa un solo observador fundamental, que en el instante cosmológico t_{ref} ocupó en el espacio $\Sigma_{t_{ref}}$ el punto de coordenadas espaciales x^i, y cuyo reloj propio marca t en el suceso A. Asignaremos al suceso A las coordenadas (t, x^i).

Dicho de otra manera: asignamos las coordenadas espaciales de manera que sean constantes a lo largo de las líneas de universo de cada uno de los observadores fundamentales, que se describen en estas coordenadas como $t \to (t, \text{cte}, \text{cte}, \text{cte})$ y están parametrizadas por t que es *el tiempo propio de cada observador fundamental*. En resumen:

> Cada observador fundamental se ve a sí mismo en reposo, con coordenadas espaciales constantes a lo largo de la evolución y todos ellos resultan completamente equivalentes entre sí.

La exigencia del principio Cosmológico es equivalente a imponer que formalmente las descripciones que del espacio-tiempo harán unos y otros observadores fundamentales serán idénticas.

La métrica más general que corresponde a las hipótesis del principio cosmológico, en las coordenadas (t, x^i), donde t es la coordenada temporal indicada antes y x^i son tres coordenadas espaciales de tipo 'cómovil' o cosmológico (por lo demás arbitrarias) es:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} a^2(t) dl_k^2 \tag{1}$$

cuyos 'ingredientes' son por un lado una métrica puramente espacial dl_k^2 en un *espacio tridimensional de curvatura constante* k, que se supone expresada en las coordenadas 'espaciales' x^i, y por otro lado una función $a(t)$ del tiempo cosmológico.

Que la métrica del 3-espacio sea de *curvatura constante* es una exigencia que se sigue del principio Cosmológico; cualquier otra posibilidad iría en contra de la homogeneidad e isotropía espacial estipuladas por el Principio.

Los 'ingredientes' de esta métrica para el espacio-tiempo a nivel cosmológico son un valor fijado k (que es la curvatura del espacio $\Sigma_{t_{ref}}$ tomado en el 'instante cosmológico' que hemos escogido, arbitrariamente, como referencia inicial) y un factor de escala $a(t)$ posiblemente dependiente del tiempo cosmológico, que por construcción valdrá 1 en el instante cosmológico de referencia inicial.

En cada subvariedad Σ_t determinada por un valor dado de t, la 'métrica espacial' se obtiene restringiendo $d\tau^2$ a Σ_t y multiplicando por $-c^2$, así que la métrica espacial es $d\sigma^2 := -c^2\, d\tau^2\big|_{\Sigma_t} = a^2(t)\, dl_k^2$. Esta métrica difiere por un factor global $a^2(t)$ de la métrica de curvatura constante k del espacio modelo, lo que muestra que cada subvariedad Σ_t es también de *curvatura espacialmente constante*, cuyo valor está dado por $k(t) = k/a^2(t)$. Esta *curvatura espacial* cambiará en general con el tiempo cosmológico, coincidiendo con k solamente en el instante cosmológico que se tomó de referencia.

Insistimos en que la condición 'curvatura constante' se refiere en cada instante cosmológico t al espacio Σ_t como tal. A lo largo del tiempo es previsible una evolución temporal del valor de la curvatura espacial de cada 'espacio de simultaneidad', que estará ligada al cambio en el factor $a(t)$.

La curvatura espacial $k(t) = k/a^2(t)$ es la cantidad con significado geométrico neto, mientras que k y $a(t)$ son cantidades *auxiliares que no son observables separadamente de manera independiente* ya que es posible transferir impunemente un factor positivo pero por lo demás completamente arbitrario entre k y $a^2(t)$ de manera que la cantidad observable $k(t)$ no se modifique. Este factor debe ser positivo, ya que $a^2(t)$ lo es. En consecuencia no hay ninguna pérdida de generalidad en restringirse a tomar para k uno de los tres valores prefijados, $k = 1, 0, -1$, llamados *'índices de curvatura'* (lo que sirve solamente para fijar el signo de la curvatura; la posible evolución temporal de $k(t) = k/a^2(t)$ no cambia el signo de la curvatura de cada subvariedad Σ_t). Una vez fijado uno de los tres índices de curvatura posibles, la función $a(t)$ transporta la descripción completa del eventual cambio de la curvatura (y también de las demás cantidades) a lo largo del tiempo.

Desde el punto de vista dimensional la única exigencia efectiva es que $a^2(t)\, dl_k^2$ tenga dimensiones L^2 y que $k(t) = k/a^2(t)$ tenga dimensiones L^{-2}. La elección más habitual, que aquí seguiremos, consiste en suponer que el factor de escala $a(t)$ es *adimensional* y que el valor k dimensionalmente es una curvatura espacial, com dimensión L^{-2} (téngase esto en cuenta, ya que al tomar $k = 1, 0, -1$ es fácil olvidar que k es dimensional). Conviene estar advertidos de que algunos autores prefieren tratar a k como un indice *adimensional*, y entonces es el factor de escala quien tiene dimensión de longitud; cuando se hace esta interpretación suele ser habitual denotar $R(t)$ al factor de escala, aunque siempre conviene chequear el significado que cada autor da a los símbolos ya que hay discrepancias entre los usos de unos y otros autores.

1.2. La métrica cosmológica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Repitamos que la métrica más general que corresponde a las hipótesis del principio cosmológico, en las coordenadas (t, x^i), donde t es la coordenada temporal indicada antes y x^i son tres coordenadas espaciales de tipo 'cómovil' o cosmológico (por lo demás arbitrarias) es:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} a^2(t) dl_k^2 \tag{2}$$

cuyos 'ingredientes' son por un lado una métrica puramente espacial dl_k^2 en un *espacio tridimensional de curvatura constante* k, que se supone expresada en las coordenadas 'espaciales' x^i, y por otro lado una función $a(t)$ del tiempo cosmológico.

• COMENTARIO 10.4. Este comentario está dirigido sólo para quienes hayan sentido la (aparente) dificultad que describimos a continuación.

Dimos en temas anteriores argumentos generales que sugerían que en un campo gravitatorio deberíamos esperar que g_{00} fuera diferente de 1 y que dependiera del 'potencial gravitatorio'. Esto ocurría así en la métrica de Schwarzschild, la otra métrica que hemos estudiado antes en cierto detalle. Sin embargo, ahora esto no pasa. ¿Qué ocurre? ¿Significa esto que en esta métrica no debe haber desplazamiento gravitatorio de frecuencias? La respuesta es un no rotundo; aquí sigue habiendo tal desplazamiento.

La aparente dificultad radica en que para estudiar estos dos problemas se ha establecido tradicionalmente escoger dos sistemas de coordenadas que son bastante diferentes en estructura. Para la métrica de Schwarzschild, las coordenadas de Schwarzschild empleadas no son de tipo síncrono, sino que podríamos describirlas como 'minkowskianas (esféricas) en el infinito espacial'. Por ello, el tiempo propio registrado en cualquier otra posición 'en reposo' no coincide con esa coordenada t, y ello lleva a la aparición de un 'potencial gravitatorio' en el elemento g_{00} de la métrica, que ya no es igual a 1. En las coordenadas de tipo síncrono que se usan al describir la métrica cosmológica se tiene idénticamente $g_{00} = 1$, pues la coordenada temporal es directamente el tiempo propio registrado en cada posición espacial 'en reposo'.

Inciso: en geometría diferencial son habituales coordenadas análogas a las síncronas: son $n-1$ coordenadas gaussianas asociadas a una hipersuperficie, con la última coordenada la longitud de arco a lo largo de las geodésicas ortogonales a esa hipersuperficie; ejemplo, las coordenadas esféricas en el plano euclídeo con una esfera como hipersuperficie. Volveré luego sobre este ejemplo.

En otras palabras, la condición $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ no es de ninguna manera una relación absoluta, sino que es la forma que debemos esperar tenga la métrica cuando hemos escogido una coordenada t que solo coincide con el tiempo propio de una partícula en reposo en una posición espacial particular (en Schwarzschild, el infinito espacial). Si escogemos como coordenada t la coordenada síncrona que coincide con el tiempo propio de una partícula en reposo en cualesquiera posición espacial, entonces por construcción $g_{00} = 1$. Pero, insistimos, esto no significa que no haya campo gravitatorio, ni tampoco que no siga existiendo un efecto de desplazamiento gravitatorio de las frecuencias. La información sobre ambos efectos en coordenadas síncronas, como las de (2) está en tales coordenadas en los elementos espaciales de la métrica; aquí, como veremos, en la función $a(t)$.

Aunque no lo hemos mencionado al hablar de la solución de Schwarzschild, resulta que también *podríamos* haber escrito esta métrica usando una coordenada temporal síncrona T (que debe ser el tiempo propio a lo largo de cada 'observador en reposo') y en ese tipo de coordenadas la métrica de Schwarzschild comienza como $d\tau^2 = dT^2 - \frac{1}{c^2}\cdots$; esta forma de escribir la solución de Schwarzschild se debe (también) a Lemaître y aunque en ella se tenga $g_{TT} = 1$, el efecto de desplazamiento gravitatorio de las frecuencias de la luz subsiste. El mensaje importante es que debido a la completa arbitrariedad en la elección de las coordenadas, y a que la interrelación de las coordenadas con las cantidades observables (duraciones, distancias espaciales), al realizarse a través de la métrica es mucho más indirecta que en la Mecánica clásica, el análisis de cualquier efecto observable requiere la consideración correcta de la métrica completa. De la consideración de un solo elemento del tensor métrico en unas ciertas coordenadas no es en general posible obtener conclusiones que sean válidas independientemente de las coordenadas. Aunque al introducir el efecto de un campo gravitatorio en la métrica vía el principio de equivalencia he insistido en la relación $g_{tt} \approx (1 + \frac{2\Phi}{c^2})$, hay que tener en cuenta que esa relación solamente se da en ciertos sistemas de coordenadas, en los que las coordenadas se han escogido de una manera muy particular. El efecto de desplazamiento gravitatorio al rojo puede ocurrir aunque g_{TT} sea idénticamente igual a 1. Para la métrica (2) daremos un poco más adelante una derivación cuidadosa de esta relación.

Damos a continuación la forma explícita de la métrica de curvatura constante $k = 1, 0, -1$ en dos tipos de coordenadas espaciales, ambos variantes de las coordenadas esféricas en el espacio euclideo y que se reducen a las esféricas ordinarias para $k = 0$.

Las coordenadas 'esféricas' genuinas en estos espacios (que se reducen a las esféricas ordinarias para $k = 0$) se definen imitando la construcción de las coordenadas esféricas en el espacio euclídeo: se escoge un origen O, y las coordenadas de P son (χ, θ, ϕ) donde χ es la *distancia al origen* y θ, ϕ los *ángulos polares ordinarios en el origen* de la geodésica que une el punto P con O. El rango de χ es $[0, \pi]$ cuando $k = 1$, y es $[0, \infty]$ en los otros dos casos. El rango de θ es $[0, \pi]$ y el de ϕ es $[0, 2\pi]$ en los tres casos. Si se quisiera enfatizar que la coordenada χ es la distancia al origen podríamos llamarla r, pero el nombre usual en la literatura es χ. En estas coordenadas la métrica es:

$$dl_k^2 = \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) & k = 1 \\ d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) & k = 0 \\ d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) & k = -1 \end{cases} \tag{3}$$

- COMENTARIO 10.5. By the way, estas coordenadas son de tipo gaussiano asociadas a una esfera de radio R centrada en el origen. Sobre esta esfera escogemos las coordenadas 'naturales' geográficas, θ, ϕ, y complementamos con la distancia d a lo largo de las geodésicas (los 'radios') perpendiculares a la esfera, con $d > 0$ hacia el exterior. La coordenada final $\chi := d + R$ se define de manera que la interpretación de χ sea la distancia al origen.

  Nótese que en estas coordenadas, la forma de la métrica es completamente análoga a (2), con un término $d\chi^2$ con coeficiente $g_{\chi\chi} = 1$, y el resto proporcional a la métrica de la hipersuperficie escogida (aquí $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$) con un factor positivo y dependiente solamente de χ

  Es relativamente frecuente encontrar en la literatura de esta cuestión una notación que sirve para describir estas tres posibilidades de manera conjunta y de forma abreviada. Se define una función, denotada $S_k(\chi)$ mediante

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh\chi & k = -1 \end{cases} \tag{4}$$

  en términos de la cual la parte puramente espacial de la métrica se escribe

$$dl_k^2 = d\chi^2 + \left(S_k(\chi)\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad k = 1, 0, -1 \tag{5}$$

La otra variante de las 'coordenadas similares a las esféricas' se obtiene reemplazando la *distancia* radial χ por otra coordenada radial ξ (que ahora ya no es la distancia al origen) relacionada con χ mediante $\xi = S_k(\chi)$ (es decir, $\xi = \sin\chi$ para $k = 1$, $\xi = \chi$ para $k = 0$ y $\xi = \sinh\chi$ para $k = -1$). En estas coordenadas (llamadas a veces esféricas isótropas) la métrica es:

$$dl_k^2 = \frac{d\xi^2}{1 - k\xi^2} + \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{6}$$

Nótese que para $k = 0$ (y solo en ese caso), las coordenadas (ξ, θ, ϕ) también se reducen a las esféricas en el espacio euclídeo, pues entonces la métrica es $d\xi^2 + \xi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$. Por tanto, los dos sistemas de coordenadas que hemos discutido aquí pueden verse como dos variantes de las coordenadas esféricas

- COMENTARIO 10.6. Nótese que las coordenadas de Schwarzschild utilizan como coordenadas espaciales r, θ, ϕ que se han construido para que la parte puramente angular de la métrica sea formalmente $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$, la misma que en el espacio euclideo. Desde este punto de vista, la coordenada radial de Schwarzschild es en cierto modo análoga a la coordenada radial ξ de las coordenadas esféricas isótropas.

Una última observación: cualquier punto del espacio cosmológico en un instante dado puede tomarse como origen, y la expresión de la correspondiente métrica en las coordenadas esféricas centradas en ese punto son las mismas, independientemente de la elección del punto. En otras palabras: la isotropía espacial impuesta por el principio cosmológico lo es respecto de todos los puntos del espacio.

En el apéndice se dan, hasta el aburrimiento, las expresiones explícitas de todos los objetos geométricos relevantes asociados a la métrica (2), con la elección de las coordenadas esféricas habituales (5). Estas expresiones están obtenidas con los programas de Mathematica que están también disponibles.

2. Las ecuaciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

2.1. Las fuentes del campo gravitatorio cosmológico

La fuente del campo gravitatorio 'cosmológico' es la distribución a gran escala de energía, que puede presentarse en forma de materia y de radiación (al menos; luego veremos que hoy día creemos que hay otra posible fuente de campo gravitatorio).

El principio cosmológico delimita las posibles fuentes, que deben tener la misma simetría que la asumida en el principio cosmológico: homogeneidad espacial e isotropía espacial (pero no homogeneidad temporal). Esto quiere decir que de todas las posibles fuentes para el campo gravitatorio en el caso más general (densidad de energía y de momento y densidades de flujo de energía y de momento), cuando nos restrinjamos a un un modelo del Universo que asuma el principio cosmológico solamente serán admisibles una *densidad de energía* (o de materia) y una *presión isótropa*, ambas *constantes* en el espacio (aunque deberemos esperar que resulten dependientes de t si las ecuaciones así lo requieren). Las restantes componentes del tensor de energía-esfuerzos, a saber, la densidad de momento, el flujo de energía y las componentes no diagonales del flujo de momento deberán necesariamente anularse, ya que lo contrario sería incompatible con el principio cosmológico.

En cosmología es tradicional escribir las ecuaciones empleando no la densidad de energía $\mathcal{E}(t)$ (lo que conceptualmente sería preferible para transmitir la idea de que es la energía la fuente real del campo) sino la *densidad de masa equivalente* denotada $\rho_m(t)$. Esta densidad de 'masa' está relacionada con la eventual densidad de energía por $\rho_m(t) = \mathcal{E}(t)/c^2$ y por supuesto, ambas cantidades coinciden si se usan unidades con $c = 1$, lo que suele ser el caso en la mayoría de las exposiciones avanzadas. A partir de ahora omitiremos el subíndice m en la densidad $\rho_m(t)$, de acuerdo con esta costumbre, pero seguiremos manteniendo la c.

La densidad de masa y la presión son las componentes diagonales del tensor de esfuerzo-energía cuando se usan coordenadas espaciales de tipo localmente galileano asociado a los observadores fundamentales (en el que las coordenadas espaciales sean coordenadas localmente 'cartesianas')

$$T^{00}\big|_O = \mathcal{E}(t)/c^2 = \rho(t), \qquad T^{11}\big|_O = T^{22}\big|_O = T^{33}\big|_O = p(t), \qquad \text{demás } \; T^{\mu\nu}\big|_O = 0 \quad (7)$$

En las coordenadas cosmológicas t, χ, θ, ϕ, la métrica (2) se escribe

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \frac{-1}{c^2}a^2(t) & & \\ & & \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi) & \\ & & & \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta \end{array}\right) \qquad (8)$$

(ver apéndice) y el tensor de energía-esfuerzo, en esas coordenadas (ver (72)), es

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} c^2\rho(t) & & & \\ \hline & c^2\frac{p(t)}{a^2(t)} & & \\ & & c^2\frac{p(t)}{a^2(t)S_k^2(\chi)} & \\ & & & c^2\frac{p(t)}{a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta} \end{array}\right), \qquad (9)$$

(recordemos que $\rho(t) = \mathcal{E}(t)/c^2$).

2.2. Las ecuaciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Ahora se deben escribir las ecuaciones de Einstein para la métrica (8) tomando como fuente este tensor energía-esfuerzo (9). En el apéndice se dan explícitamente todos los símbolos de Christoffel, componentes del tensor de Riemann, de Ricci y de Einstein asociados a la métrica (8), de manera que para obtener las correspondientes ecuaciones de Einstein basta introducir en ellas el tensor de Einstein de la métrica cosmológica y el tensor energía-esfuerzo de las fuentes cosmológicas. Al escribir el tensor de energía-esfuerzo (9) conviene tener presente que en Cosmología, la densidad de masa y la presión son las cantidades *propias*, que se refieren a materia que está en reposo respecto a cada observador fundamental.

- COMENTARIO 10.7. Conviene no perder de vista que el contenido físico de tal tensor energía-esfuerzo (9) es el mismo, en coordenadas espaciales χ, θ, ϕ que el dado en la fórmula (7), en donde para los observadores fundamentales se emplean otras coordenadas espaciales diferentes, de tipo localmente cartesiano.

• COMENTARIO 10.8. También se pueden referir las ecuaciones a una base no coordenada (*frame*, un procedimiento que no hemos discutido en este curso pero que resulta preferible en muchos casos; ver los detalles en el texto de Hartle, quien plantea usando frames esta cuestión).

Independientemente del camino escogido, el resultado es que, debido a las simetrías del problema, del conjunto de ecuaciones de Einstein (en total 10 ecuaciones) hay solo dos ecuaciones no triviales independientes; las restantes son identidades.

• COMENTARIO 10.9. Esencialmente son las ecuaciones que corresponden a la componente 00 (tt) y a una cualquiera de las tres componentes espaciales $11, 22, 33$ (una cualquiera entre las tres $\chi\chi, \theta\theta, \phi\phi$ que por la simetría esférica resultan completamente equivalentes entre sí); esto se ve directamente de las expresiones explícitas de $G^{\mu\nu}$ (78) y de $T^{\mu\nu}$ (75).

Estas ecuaciones, las básicas de la cosmología relativista, resultan ser:

$$\frac{1}{a^2(t)}\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \tag{10}$$

$$\frac{1}{a(t)}\frac{d^2a(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) \tag{11}$$

• EJERCICIO 10.1. Derivar realmente ambas ecuaciones.

Estas dos ecuaciones exhiben la estructura típica de las ecuaciones de Einstein. En el miembro derecho aparece la geometría del problema (la constante k y la única función incógnita de la métrica $a(t)$, de la cual intervienen las derivadas temporales primeras y segundas). En los miembros izquierdos aparecen las fuentes, a través de las funciones densidad y presión.

• COMENTARIO 10.10. Dimensionalmente, todos los términos en estas ecuaciones son T^{-2}. Nótese que es frecuente en la literatura usar unidades naturales, en las que $c = 1$ y adimensional; haciendo eso las dimensiones T, L coincidirían. Aquí he preferido mantener explícitos los factores c.

El modelo obtenido aplicando al universo la hipótesis del *principio cosmológico*, que conduce a estas ecuaciones, se conoce como modelo de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). Robertson y Walker obtuvieron estas ecuaciones en su forma general entrada la década de 1930, pero un caso particular había sido obtenido por primera vez por A. Friedmann en 1922 y por ello estas dos ecuaciones se conocen genéricamente como ecuaciones de Friedmann; a su vez G. Lemaître, sin conocer el trabajo previo de Friedmann, había desarrollado el estudio del problema entre los años 1927 a 1933.

Las ecuaciones (10) y (11) deben verse como describiendo las relaciones entre dos cantidades geométricas (el índice de curvatura k y el factor de escala $a(t)$) y dos cantidades físicas (la densidad de materia (o energía) $\rho(t)$ y la presión $p(t)$) que espacialmente deben ser homogéneas, de acuerdo con el principio cosmológico y que podrán depender exclusivamente del tiempo.

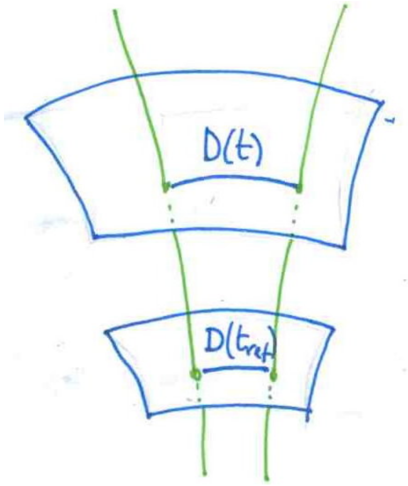
• COMENTARIO 10.11. Los autores muy precisos llaman 'ecuación de Friedmann' solamente a la pimera, y se refieren a la segunda como la 'ecuación de aceleración de Friedmann'

Las dos funciones $\rho(t)$ y $p(t)$ deben recoger las contribuciones de todas las posibles fuentes de campo gravitatorio, que podrán ser de diferentes tipos, en cada uno de los cuales densidad y presión a su vez estarán ligadas entre sí por una ecuación de estado.

2.3. La expansión de Hubble

Consideremos la evolución de la distancia entre dos puntos cosmológicos (dos galaxias) a lo largo del tiempo cosmológico. Ignorando los posibles movimientos peculiares que puedan tener esas galaxias (que en todo caso son pequeños), ambas están situadas en ciertos valores fijos de las coordenadas cosmológicas espaciales (que viven sobre un espacio 'modelo' de curvatura fija $k = 1, 0, -1$).

La 'distancia' D entre los correspondientes puntos del espacio modelo —que a veces se denomina *distancia comóvil*— es una cantidad auxiliar que no tiene ningún significado físico real. Lo que merece físicamente el nombre de *distancia* entre las galaxias se refiere a la *distancia propia* en el 'espacio' Σ_t en cada 'instante cosmológico', esto es, en cada una de las subvariedades $t = \mathrm{cte}$, distancia que denotaremos $D(t)$ (el empleo del argumento (t) evita la posibilidad de confusión con la distancia comóvil).



Y evidentemente, la distancia espacial propia $D(t)$ entre este par de galaxias depende del tiempo cosmológico t a través del factor de escala $a(t)$, y la relación entre las distancias en dos instantes t_{ref} y t es:

$$\frac{D(t)}{a(t)} = \frac{D(t_{ref})}{a(t_{ref})} \tag{12}$$

La conclusión inevitable es: si el factor de escala $a(t)$ depende realmente del tiempo cosmológico t, entonces la distancia entre dos galaxias arbitrarias (movimientos peculiares aparte) cambia con el tiempo de una manera *'universal', prescrita exclusivamente por la dependencia temporal del factor de escala.* Así pues, salvo el caso excepcional de que $a(t)$ no dependa realmente de t, el universo *no es estático.* Escribamos ahora la relación anterior como

$$D(t) = \frac{a(t)}{a(t_{ref})} D(t_{ref}) \tag{13}$$

en la que vamos a calcular la derivada temporal de esta distancia con respecto a t. Evidentemente

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t_{ref})} D(t_{ref}), \tag{14}$$

pero $D(t_{ref})/a(t_{ref}) = D(t)/a(t)$, lo que permite eliminar t_{ref} y conduce a una forma alternativa de la expresión anterior que a diferencia de ella involucra un solo instante cosmológico

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D(t). \tag{15}$$

En consecuencia, la distancia $D(t)$ entre dos galaxias *cambia con el tiempo*, y la velocidad $\frac{dD(t)}{dt}$ a la que esta distancia cambia es *proporcional a la propia distancia.* La constante de proporcionalidad se llama *parámetro de Hubble* $H(t)$ (o constante de Hubble).

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{16}$$

Conviene entender bien que aquí 'constancia' se refiere a que en cada instante de tiempo cosmológico esta cantidad es *espacialmente constante* y toma el mismo valor para dos pares cualesquiera de galaxias, independientemente de sus posiciones. Sin embargo, esta 'constante' depende del tiempo cosmológico, por lo que propiamente hablando no debería denominarse constante. El uso establecido se ha impuesto con tal fuerza que solo queda aceptar el abuso de lenguaje sin dejarse desorientar por él; en favor del abuso de lenguaje hay que decir que los ritmos de este cambio son a nivel cosmológico, es decir extremadamente lentos en la escala antropocéntrica de tiempos, por lo que el nombre 'constante' es 'casi' correcto.

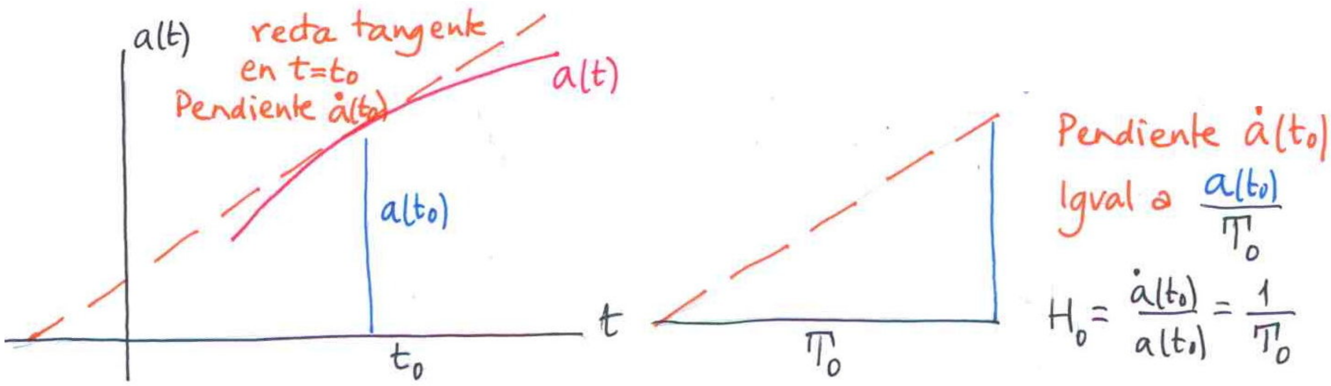
Es convencional en Cosmología emplear el subíndice 0 para denotar los valores 'actuales' (en términos cosmológicos) de las cantidades, de manera que la constante de Hubble (actual) y la 'constante de Hubble' en cualquier otro instante cosmológico, anterior o posterior, están relacionados con los factores de escala en el correspondiente instante cosmológico por

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}, \qquad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{17}$$

y la fórmula (15) se puede reescribir como

$$\frac{dD(t)}{dt} = H(t)\,D(t). \tag{18}$$

que expresa la velocidad a la que cambia la separación propia entre dos galaxias con el transcurso tiempo cosmológico. Esta velocidad de separación es *proporcional a la propia distancia*, con la constante de Hubble como factor de proporcionalidad.

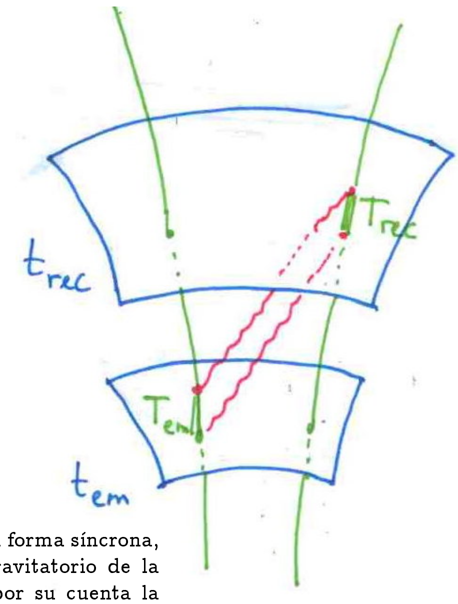


La fórmula (18) puede reescribirse como

$$H(t) = \frac{\dot{D}(t)}{D(t)}. \tag{19}$$

que permite ver a la constante de Hubble como la velocidad a la que se separan dos observadores fundamentales (o dos galaxias, si se ignoran sus movimientos peculiares) por unidad de separación. Esto explica porqué, aunque dimensionalmente $H(t)$ es un inverso de tiempo, es preferible (y habitual) dar $H(t)$ en unidades de 'velocidad por unidad de separación espacial', que en los usos astrofísicos convencionales son $Km \cdot s^{-1}/Mpc$.

Naturalmente, la cantidad $D(t)$, que se refiere a una distancia cosmológica en el instante t, no es *directamente* observable (aunque varios métodos que requieren hipótesis plausibles ofrecen estimaciones razonables). Pero la ecuación anterior tiene una consecuencia *observable* directa e inevitable: la frecuencia de la radiación electromagnética que fue emitida en una galaxia en un instante cosmológico t_{em} anterior al actual, se recibe desde nuestra galaxia en el instante actual t_0 con una *frecuencia diferente*. Siguiendo la evolución de pulsos emitidos con frecuencia ν_{em} en el espacio-tiempo cuya métrica es (2), se concluye que el cociente entre las frecuencias recibida y emitida es diferente de 1 y depende de los valores de los factores de escala en el instante de emisión y recepción:

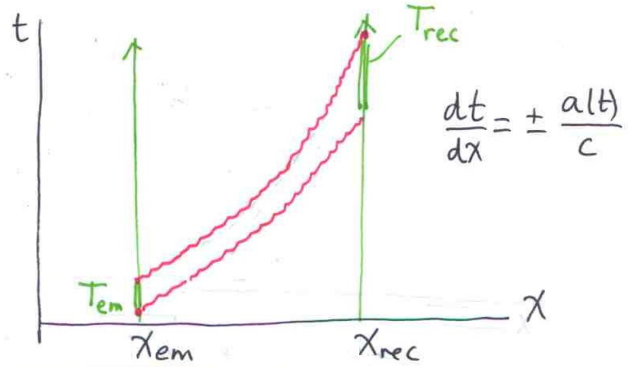


$$\frac{\nu_0}{\nu_{em}} = \frac{a(t_{em})}{a(t_0)} \tag{20}$$

• EJERCICIO 10.2. En un comentario anterior indicamos que aunque la métrica tenga la forma síncrona, en la que g_{00} sea identicamente igual a 1, sigue habiendo un desplazamiento gravitatorio de la frecuencia de la luz. Para los replicantes bastante atrevidos se propone obtener por su cuenta la relación anterior antes de leer la derivación que presentamos a continuación, que está tomada del texto 'Gravity' de Hartle, Chap. 18. Leer la derivación que se detalla en el siguiente comentario es tarea que deben hacer también los humanos.

• COMENTARIO 10.12. Veamos cómo se llega a esta conclusión. Vamos a centrarnos, para evitar complicaciones innecesarias, en una propagación de la luz que sea radial desde el punto de vista del observador fundamental que hayamos escogido, de manera que las restantes coordenadas, que supondremos fijadas a $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ no intervengan.

Conviene tener presente que la coordenada radial, —denotada χ y no r— se refiere al espacio modelo de cada subvariedad Σ_t, y por tanto, a lo largo de una línea espacialmente radial desde el punto de vista de un observador fundamental, la diferencia entre coordenadas χ no es directamente igual a ninguna distancia en el espacio físico en cada instante t (ver los comentarios que preceden a (13)).



En el suceso de emisión, con coordenadas (t_{em}, χ_{em}) se emite una señal luminosa, que se propaga en la métrica FLRW y acaba llegando a un suceso de recepción. La recepción la supondremos situada en el instante actual, lo que indicaremos escribiendo $(t_0, \chi_0) \equiv (t_{rec}, \chi_{rec})$ para este suceso 'recepción en el instante actual'. La evolución del pulso de luz sigue en el espacio-tiempo la condición $d\tau = 0$, lo que para una propagación radial lleva a la condición

$$dt^2 = \frac{a^2(t)}{c^2} d\chi^2 \tag{21}$$

de donde la propagación cosmológica de la luz corresponde a la ecuación

$$dt = \pm \frac{a(t)}{c} d\chi \tag{22}$$

y el signo $\pm$ corresponde a luz acercándose / alejándose radialmente del observador fundamental escogido. Esta ecuación es de variables separadas, y se escribe mejor como

$$d\chi = \pm c \frac{dt}{a(t)} \tag{23}$$

Escojamos uno de los dos signos, por ejemplo el $-$ (que correspondería a luz que nos llega a nosotros desde una galaxia lejana; la elección de uno u otro signo es irrelevante) e integremos ahora esta ecuación a lo largo de la trayectoria de la luz, lo que lleva directamente a

$$-c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\chi_{em}}^{\chi_0} d\chi \tag{24}$$

Como aún no conocemos la forma precisa de la función $a(t)$ no podemos efectuar explícitamente la integración en t, pero esta dificultad no nos va a impedir extraer información útil de la relación anterior. La clave está en que la integral de la variable radial es simplemente $\chi_0 - \chi_{em}$,

$$-c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\chi_{em}}^{\chi_0} d\chi = \chi_0 - \chi_{em} \tag{25}$$

y como el valor $\chi_0 - \chi_{em}$ depende exclusivamente de las posiciones radiales de la emisión y de la recepción de la luz, la integral $\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ *debe* tomar el mismo valor para otros procesos que sean emisión de luz (y recepción correspondiente) efectuada entre las mismas coordenadas espaciales aunque en otros instantes. Conviene tener claro que la coordenada χ es solamente la distancia comóvil, en el espacio modelo, pero no es directamente la distancia en ninguno de los espacios Σ_t.

Consideremos ahora la luz, de frecuencia ν_{em} emitida en el mismo lugar anterior a lo largo de un periodo completo $T_{em} = \frac{1}{\nu_{em}}$, intervalo temporal que podemos suponer muy pequeño frente al valor de t_{em}. Para enfatizar este hecho, en vez de emplear el período T_{em} escribiremos los instantes de emisión de las dos crestas sucesivas de la onda luminosa de la onda como t_{em} y $t_{em}\delta t_{em}$, en donde $\delta t_{em} := T_{em}$. Así pues, un periodo completa de la luz se emite en el intervalo entre t_{em} y $t_{em} + \delta t_{em}$. Este periodo completo se recibirá en un intervalo de tiempo del receptor, entre t_0 y algún instante $t_0 + \delta t_0$ ligeramente posterior a t_0, en donde δt_0 estará ligado con el período T_0 de la luz recibida: $\delta t_0 = T_0 = \frac{1}{\nu_0}$.

Ahora, aplicando dos veces la relación (25) y observando que el valor $\chi_0 - \chi_{em}$ es común

$$-c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \chi_0 - \chi_{em} = -c \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{26}$$

de donde se deriva que necesariamente debe tenerse

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{27}$$

y por la aditividad de la integral relativamente al intervalo de integración, podemos descomponer cada integral como una suma de otras dos, escogidas de tal manera que una de las integrales sea común a ambas lados de la igualdad y se cancele. Esto se consigue descomponiendo en la ecuación anterior

$$\int_{t_{em}}^{t_0} = \int_{t_{em}}^{t_{em}+\delta t_{em}} + \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_0}, \qquad \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_0+\delta t_0} = \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \tag{28}$$

Reemplazando y comparando, lo que queda es

$$\int_{t_{em}}^{t_{em}+\delta t_{em}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{29}$$

Como ahora hemos supuesto que $\delta t_{em} = T_{em}$, $\delta t_0 = T_0$ son muy pequeños, las integrales extendidas a un intervalo temporal muy pequeño durante el cual la función $a(t)$ apenas ha variado se aproximan por el teorema del valor medio correspondiente, lo que lleva a relación

$$\frac{1}{a(t_{em})} T_{em} = \frac{1}{a(t_0)} T_0 \tag{30}$$

y de aquí se llega directamente a la relación entre los períodos de emisión y de recepción

$$\frac{T_{em}}{T_0} = \frac{a(t_{em})}{a(t_0)} \tag{31}$$

y para las frecuencias se obtiene la relación inversa

$$\frac{\nu_0}{\nu_{em}} = \frac{\omega_0}{\omega_{em}} = \frac{a(t_{em})}{a(t_0)} \tag{32}$$

que es precisamente la relación que anunciamos antes.

De manera que el cociente $\frac{a(t_{em})}{a(t_0)}$ regula no sólo la evolución de la distancia espacial, sino *también* el cambio en la frecuencia cuando la luz se propaga entre dos instantes cosmológicos. Si el universo se *expande* (si $a(t)$ crece con t), entonces la frecuencia recibida en la actualidad ω_0 es *menor* que la frecuencia ω_{em} emitida en algún momento t_{em} del pasado por el factor

$$\omega_0 = \frac{a(t_{em})}{a(t_0)} \omega_{em} \tag{33}$$

Se mide usualmente este desplazamiento cosmológico hacia el rojo por el 'redshift' z, definido en términos de las longitudes de onda como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \tag{34}$$

que a su vez se relaciona con las frecuencias y con los valores del factor de escala mediante

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} = \frac{\nu_{em}}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_{em})} \tag{35}$$

- EJERCICIO 10.3. Comprobar que para galaxias cercanas entre sí, a distancia (propia) d, la relación entre distancias (13) conduce a la relación lineal $z \approx \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} d$, relación que es el puente entre la ley observacional de Hubble y las relaciones cosmológicas. Realmente, esta relación puede verse como consecuencia de unir dos piezas: la fórmula Doppler para la relación entre redshift y velocidad de alejamiento $V/c = \Delta\lambda/\lambda = z$ y la forma original de la ley de Hubble, $V = H_0\, d$.

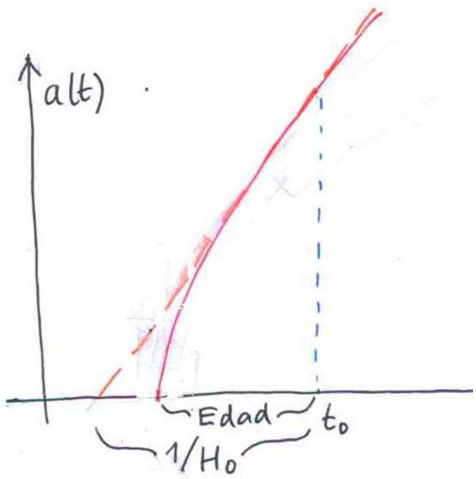
Empleando ahora la ecuación (13) en la forma $\frac{a(t_{em})}{a(t_0)} = \frac{D(t_{em})}{D(t_0)}$ llegamos alternativamente a

$$\frac{\nu_0}{\nu_{em}} = \frac{\omega_0}{\omega_{em}} = \frac{D(t_{em})}{D(t_0)} \tag{36}$$

La relación así obtenida nos da la consecuencia directamente observable que hemos mencionado antes:

La luz proveniente de galaxias alejadas se recibe con una frecuencia diferente de aquella con la que fue emitida.

El cociente entre las frecuencias de emisión ν_{em} y de recepción ν_0 en el momento actual está dado por el cociente entre los valores de la función de escala $a(t)$. Esta ley fue propuesta en 1929 por E. Hubble, quien la descubrió observacionalmente como resultado de un programa sistemático de observación de galaxias, analizando el desplazamiento al rojo de la luz recibida y comparando con determinaciones *independientes* de las distancias. A partir de las observaciones de E. Hubble, refinadas y confirmadas durante 80 años, está fuera de toda duda que en la actualidad el universo se encuentra *en expansión* (esto es, la función $a(t)$ es actualmente *creciente* puesto que $\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$ es positiva).



El último valor 'oficial' del programa Planck, de Febrero de 2015 da para la constante de Hubble un valor del orden de $H_0 = 67{,}8 \pm 0{,}9$ (km/s)/Mpc . Dimensionalmente, la constante H_0 tiene dimensiones de inverso de tiempo. Se conoce como 'tiempo de Hubble' al inverso $t_{H_0} = \frac{1}{H_0}$ de la constante de Hubble; su valor actual es $t_{H_0} \approx 13{,}8 \times 10^9$ años $= 0{,}43 \times 10^{18}$ s. Este valor es una estimación grosera (por exceso) de la edad del Universo.

- COMENTARIO 10.13. La historia de la determinación de H_0 es extremadamente interesante y a la vez muy ilustrativa de la ciencia y de su sociología. El valor inicialmente propuesto por Hubble, un orden de magnitud mayor que el actual, era incorrecto debido a errores sistemáticos en la calibración mutua de las diferentes escalas de distancia. Esta incorrección causaba que el tiempo de Hubble estaba entre unos 1000 y 2000 millones de años, lo que hacía que algunas rocas datadas en la Tierra con otros procedimientos basados en la radiactividad natural (en torno a unos 3000 millones de años o algo más) resultaran ser *mas viejas* que el propio Universo (!) lo que era manifiestamente absurdo. Se solventó esta discrepancia ya entrada la década de 1950 cuando se reconoció que el error estaba en la calibración de las escalas de distancias y no en las dataciones geológicas que eran correctas. Tras una agria polémica que ha durado cerca de 30 años (entre 1960 y 1990) en los cuales dos escuelas 'rivales' de cosmólogos, favorecían valores bastante discrepantes (unos del orden de 50 (km/s)/Mpc y otros del orden de 100 (km/s)/Mpc), esta cuestión pueden considerarse zanjada y en los últimos años varios métodos de estimación de H_0 parecen converger hacia un valor del orden de entre 68 y 70 (km/s)/Mpc. Como el posible error aun es bastante grande, los cosmólogos suelen escribir $H_0 = h \cdot 100$ (km/s)/Mpc, con un parámetro h adimensional del orden de 1, y suelen dejar h explícito en todas las ecuaciones, de manera que si en el futuro hubiera consenso sobre un nuevo valor más preciso de H_0 bastaría modificar el valor que hoy se cree correcto de este parámetro adimensional $h = 0{,}68 - 0{,}70$ al nuevo valor, sin necesidad de más modificaciones en las ecuaciones (de hecho, los valores de 2015 de la misión Planck favorece valores cercanos a $h = 0{,}68$, mientras que hace solamente unos años el mejor valor estaba en $h = 0{,}72$, y quince años atrás en $h = 0{,}65$, una muestra de que la determinación precisa de la constante de Hubble es asunto complicado). En estas notas, cuya intención es ser una introducción básica, no hemos seguido la práctica de escribir las ecuaciones empleando el factor h.

2.4. Consecuencias directas de las ecuaciones de Friedmann (sin constante cosmológica)

Introduciendo la constante de Hubble en la primera de las ecuaciones de la cosmología relativista se obtiene la ecuación

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)} \tag{37}$$

que liga entre sí, a lo largo de la evolución cosmológica tres cantidades fundamentales: la constante de Hubble $H(t)$, la densidad $\rho(t)$ y la curvatura espacial $k/a^2(t)$ (notar que dimensionalmente $k/a^2(t)$ es L^{-2}). Recuerdese que la densidad ρ se refiere a la densidad total en escala de masas, esto es, a la suma de las densidades de energía de todos los posibles orígenes, traducida mediante el factor $1/c^2$ a escala de masa.

De esa ecuación se deriva directamente la primera consecuencia fundamental para la Cosmología escribiendola en la forma

$$k = \frac{a^2(t)}{c^2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)\right) \tag{38}$$

y recordando que los posibles valores de k son solamente $1, 0, -1$. Como el factor $\frac{a^2(t)}{c^2}$ es necesariamente positivo, es evidente que el signo de k *debe necesariamente coincidir* con el signo de $\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)$. Esto es:

> **La geometría espacial de cada una de las subvariedades Σ_t (el 'espacio' en un 'instante cosmológico') es de curvatura positiva/nula/negativa según que la cantidad $\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)$ sea mayor/igual/menor que 0.**

La condición anterior está formulada para un instante cosmológico t; sin embargo por construcción la alternativa entre las tres posibilidades resulta independiente de t. Para convencerse de ello basta fijarse en la evolución temporal de la cantidad $\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)$ que se obtiene de (38) y depende del factor de escala como

$$\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t) = \frac{kc^2}{a^2(t)} \tag{39}$$

Como el factor $\frac{c^2}{a^2(t)}$ es siempre positivo, está claro que siempre el signo de esta combinación es igual al signo de k: el *signo* de la combinación $\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)$ no cambia a lo largo de la evolución cosmológica.

Considerando el valor de la constante de Hubble $H(t)$ en el instante cosmológico t como un dato, a la densidad que hace que la cantidad $\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - H^2(t)$ tome el valor 0 se la denomina *densidad crítica* en ese instante cosmológico. En cada instante cosmológico, el valor de la densidad crítica está ligado con el de la constante de Hubble mediante:

$$\rho_{\text{crit}}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \tag{40}$$

En otras palabras, se llama *densidad crítica* a la densidad (en cada instante t) de un modelo de FLRW en el cual las subvariedades Σ_t tengan curvatura espacial $k = 0$, esto es, de un modelo en el cual a gran escala el Universo sea *espacialmente* euclideo.

Las evidencias observacionales actuales apuntan a que el universo real tiene precisamente la densidad crítica. Naturalmente, el valor preciso de la densidad crítica se refiere a un instante del tiempo cosmológico, y este valor cambia con el tiempo, aunque como hemos visto antes, la condición de que el universo sea espacialmente de curvatura positiva, nula o negativa resulta mantenerse a lo largo del tiempo (por ello, si la densidad del universo actual es la crítica, seguirá por siempre siendo crítica aunque su valor numérico pueda cambiar con t, ya que la constante de Hubble también habrá cambiado).

Con la determinación aceptada del valor actual de la constante de Hubble, se obtiene para la densidad crítica actual $\rho_{0_{\text{crit}}} \equiv \rho_{\text{crit}}(t_0) \approx 9{,}74 \times 10^{-30}\text{g/cm}^3$, lo que viene a ser la densidad que corresponde a unos pocos (≈ 5) átomos de H por metro cúbico. Conviene comparar este valor con la estimación de la densidad cosmológica actual de la materia bariónica ordinaria, que se cifra en $\approx 0{,}2$ átomos de H por metro cúbico; esto corresponde en torno solamente al 4 % de la densidad crítica.

Es estándar utilizar la notación Ω_0 (ó Ω) como una medida *adimensional* de la densidad actual (o en cualquier instante), refiriéndola precisamente a la densidad crítica.

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{\text{crit}}(t_0)}, \qquad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}(t)} \tag{41}$$

Cuando hay diferentes componentes en la densidad de energía (debidas a la materia, a la radiación, etc), se suele distinguir estas componentes mediante un índice adicional, reservando el símbolo Ω_0 (ó Ω) sin otros índices adicionales para la suma total.

Así la condición de que el universo sea (espacialmente) de curvatura positiva/nula/negativa se traduce en términos de Ω mediante la condición simple 'Ω es mayor/igual/menor que 1' (en cualquier instante). Si Ω es diferente de 1 su valor cambiará con el tiempo cosmológico, pero solo de manera que cada una de las alternativas 'Ω es mayor/igual/menor que 1' se mantenga a lo largo de la evolución.

2.5. Las ecuaciones de FLRW en términos de las curvaturas seccionales

- COMENTARIO 10.14. Este apartado no suele encontrarse en las exposiciones habituales, de manera que si lo que se desea es seguir una exposición puramente convencional puede omitirse. Pero si se quiere tener varios puntos de vista sobre la cuestión, omitirlo es una mala idea

Como una consecuencia de la isotropía espacial, las tres curvaturas seccionales en los 2-planos 'tiempo-espacio' son las mismas independientemente de qué direccion espacio se tome para obtener un 2-plano que contenga la dirección temporal: $K_{(t\chi)}(t) = K_{(t\theta)}(t) = K_{(t\phi)}(t)$. Denotaremos por $K(t)$ a este valor común. En otras palabras, el campo de marea cosmológico está dado por un tensor que es un múltiplo escalar de la identidad.

Y como otra consecuencia de la isotropía espacial, las tres curvaturas seccionales en los 2-planos 'espacio-espacio' son las mismas independientemente de qué dos direcciones espaciales se tomen para obtener un 2-plano de género espacio que contenga las dos direcciones espaciales dadas: $K_{(\theta\phi)}(t) = K_{(\chi\phi)}(t) = K_{(\chi\theta)}(t)$. Denotaremos por $\mathcal{K}(t)$ a este valor común.

Las dos cantidades $K(t)$ y $\mathcal{K}(t)$ son dos cantidades geométricas, que tienen un significado 'absoluto' independiente por completo de qué coordenadas se empleen, y que son las dos curvaturas seccionales en los 2-plano 'género tiempo' y 'género espacio' que caracterizan la geometría del Universo a gran escala en el modelo de FLRW.

En el apéndice se dan los resultados del calculo de las curvaturas seccionales de la métrica de FLRW, definidos como $K_{(\alpha\beta)} := \frac{R_{\alpha\beta\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta\alpha\beta}}$ (en donde $g_{\alpha\beta\alpha\beta}$ son los elementos 'diagonales' del tensor métrico para los bivectores, $g_{\mu\nu\alpha\beta} := g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$. Todas estas curvaturas seccionales así definidas tienen dimensión T^{-2}. Los resultados son

$$K(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \qquad \mathcal{K}(t) = -\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{kc^2}{a^2(t)} \tag{42}$$

Si queremos pasar a la curvatura seccional del 3-espacio, que debe ser dimensionalmente L^{-2} y que en este caso denotaremos por $\mathbb{K}(t)$, hay que multiplicar por $\frac{-1}{c^2}$. Así se obtiene que las dos curvaturas significativas de la métrica cosmológica de FLRW son

$$K(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \qquad \mathbb{K}(t) = \frac{1}{c^2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \tag{43}$$

Solo a primera vista debe uno sorprenderse de que las dos curvaturas seccionales básicas en esta solución sean precisamente iguales a los miembros izquierdos de las dos ecuaciones de FLRW. La razón profunda es que en los miembros derechos están las cantidades físicas propias (densidad y presión), que por las ecuaciones de Einstein están relacionadas directamente con las cantidades geométricas propias, que son las curvaturas seccionales. Escritas como relaciones entre densidad y presión por un lado y curvaturas seccionales por otro, las dos ecuaciones de FLRW son por tanto:

$$K(t) = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) \qquad \mathbb{K}(t) = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)}{c^2} \tag{44}$$

En el límite newtoniano, en el que formalmente $c \to \infty$ estas dos ecuaciones indican que $\mathbb{K}(t) = 0$ (por lo que el 3-espacio es euclideo, sin curvatura espacial), y que la presión no produce gravedad con lo que $K(t) = \frac{4\pi G}{3}\rho(t)$ que es exactamente la ecuación que en su momento vimos para las componentes diagonales del campo de marea newtoniano en el interior de un medio de densidad ρ.

Ahora, en una teoría relativista, quizás el aspecto más destacado es que la curvatura seccional espacio-espacio puede ser diferente de 0 y que ese valor $\mathbb{K}(t)$ es *diferente* de la curvatura de las subvariedades que tomamos como 'el espacio cosmológico en un instante t'. Esta diferencia se debe a que la curvatura seccional corresponde a la curvatura según subvariedades totalmente geodésicas, pero lo que aquí estamos llamando '3-espacio en cada instante cosmológico' no son subvariedades totalmente geodésicas.

- COMENTARIO 10.15. Sin necesidad de entrar en el análisis detallado de esta cuestión, que es algo delicado, el resultado enunciado se entiende perfectamente con el ejemplo del espacio euclideo en coordenadas polares: las subvariedades $r =$ cte son esferas, cuya curvatura (inducida) es $1/r^2$ que es diferente de 0, pero la curvatura seccional del propio espacio euclideo en la misma direccion tangente a cada esfera es igual a 0, y por tanto es diferente de $1/r^2$. La subvariedad totalmente geodésica determinada por ese elemento 2-plano tangente es un plano (y tiene curvatura gaussiana igual a 0, que por definición es la correspondiente curvatura seccional), mientras que la subvariedad es una esfera, cuya curvatura gaussiana $1/r^2$ es diferente de 0.

Es evidente ahora que podemos agrupar las varias expresiones de las dos curvaturas seccionales básicas como

$$K(t) = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \qquad \mathbb{K}(t) = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)}{c^2} = \frac{H^2(t)}{c^2} + K(t) \tag{45}$$

en donde $K(t)$ es la curvatura ordinaria (inducida) de las subvariedades $t = \text{cte}$. La conclusión es que conviene ser cuidadosos con el lenguaje: al decir que $k = 0$ corresponde al 3-espacio es euclideo, con curvatura $K(t) = \frac{k}{a^2(t)}$, estamos hablando de una cantidad que es la curvatura inducida de una cierta subvariedad y que no es igual a la curvatura seccional del espacio-tiempo en las direcciones espacio-espacio.

Pero una vez visto esto, si ponemos los números, vemos que las diferencias entre las dos cantidades $\mathbb{K}(t)$ y $K(t)$ son muy pequeñas. En concreto, para $H_0 = 2{,}6{\cdot}10^{-18}\text{s}^{-1}$, el término $\frac{H^2(t)}{c^2}$ vale del orden de 10^{-52}m^{-2}, lo que correspondería a un radio de curvatura de 10^{26}m, valor que es del orden del tamaño del Universo observable, y curiosamente, también del radio de Schwarzschild asociado a la masa total del universo observable (supuesto crítico).

2.6. La ecuación de conservación (local) de la masa / energía

El tensor energía-esfuerzo (9) de la materia, radiación, etc. que contribuyen a determinar la estructura del espacio-tiempo a nivel cosmológico debe satisfacer la condición de conservación: su divergencia (covariante) debe ser idénticamente nula.

- EJERCICIO 10.4. Usando las expresiones dadas en el apéndice para la conexión (82) y para el tensor de energía-esfuerzo (75), se pide escribir explícitamente las ecuaciones de conservación que expresan que la divergencia (covariante) de ese tensor sea idénticamente nula. (En el párrafo siguiente vamos a llegar a esas mismas ecuaciones como consecuencia automática de las ecuaciones de Einstein, de manera que el objetivo de este ejercicio es meramente obtener una comprobación independiente del resultado).

En su momento comentamos que las ecuaciones de Einstein implican, de manera automática, la conservación de energía / momento de las fuentes del campo. De manera que la comprobación directa propuesta en el ejercicio anterior es redundante, y en vez de usar la ecuación de conservación escrita directamente imponiendo la anulación de la divergencia covariante del tensor de energía–esfuerzo, podemos también derivar la misma condición de las dos ecuaciones de Friedmann (que son realmente las ecuaciones de Einstein en este problema).

El proceso es realmente muy simple. Se multiplica la primera ecuación de FLRW por $a^2(t)$, se deriva respecto a t y allí se substituye el término $\ddot{a}(t)$ por el tomado de la segunda ecuación. Este proceso lleva a

$$\dot{\rho} = -3\,\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left(\rho(t) + \frac{p(t)}{c^2}\right) \tag{46}$$

Prosaicamente ésta ecuación puede verse como la ecuación de evolución de la densidad. Pero también puede verse como la ecuación de conservación local de la energía. O, si se quiere, como la expresión cosmológica del primer principio de la termodinámica. Insistimos en que desde el punto de vista de la estructura lógica de la teoría no es una ecuación independiente de las dos ecuaciones de Friedmann, aunque para la claridad de muchos argumentos es mejor considerarla como la tercera ecuación fundamental en toda la Cosmología.

Debe notarse que la derivada temporal de la densidad está dada por una expresión en la que interviene, como era de esperar, el factor de escala (precisamente, bajo la forma de la constante de Hubble) pero también aparece la presión. Lo que significa que la evolución con el tiempo de la densidad $\rho(t)$ depende no solo de la densidad sino también de la presión, que está ligada con la densidad por la relación que se conoce como *ecuación de estado*. También merece notarse que la combinación de densidad de masa y presión que regula la evolución de la densidad en (46) es diferente de una combinación parecida que interviene en la segunda ecuación de FLRW (11); en esa ecuación la presión interviene con un factor extra 3 relativamente a la densidad, factor relativo que aquí no aparece; veremos enseguida que esta diferencia tiene consecuencias importantes.

- EJERCICIO 10.5. Encontrar la ecuación que da la evolución temporal de la presión $p(t)$.

Hay dos tipos de fuentes que son obviamente relevantes en la estructura del universo, la *materia ordinaria (bariónica)* en las galaxias (formada por protones, neutrones y electrones, la materia de la que nosotros mismos estamos hechos, que puede modelarse a nivel cosmológico como un *gas de galaxias sin presión*) y la *radiación* electromagnética. Cada uno de estos tipos tiene una ecuación de estado diferente, de modo que la evolución de las correspondientes contribuciones será diferente. Luego mencionaremos que las observaciones sugieren al menos otros dos tipos de fuentes para el campo gravitatorio cosmológico: la *materia oscura* y la *energía oscura*.

Hay varias cantidades que cambian con el tiempo cosmológico: el factor de escala $a(t)$, la 'constante' de Hubble $H(t)$, la densidad y la presión $\rho(t), p(t)$, la densidad crítica $\rho_{\text{crit}}(t)$ y a partir de ella el parámetro adimensional de densidad $\Omega(t)$. El objetivo deseable será obtener las ecuaciones que dan la evolución de estas cantidades para cada fuente del campo gravitatorio cosmológico y para todas las fuentes conjuntamente en las proporciones en que aparezcan en la naturaleza. La clave para todas estas evoluciones es la dependencia temporal del factor de escala, y una vez conocida tal evolución, $a(t)$, todas las demás pueden obtenerse de manera relativamente sencilla a partir de ella. Dedicamos a este objetivo las secciones a continuación.

2.7. Modelos cosmológicos de FLRW con solo materia ordinaria

Como fuente más obvia de la energía responsable de la estructura del universo, podemos tomar una distribución de materia ordinaria (bariónica, formada básicamente por átomos de los diferentes elementos químicos, con materia ionizada y plasma) con densidad de masa no nula $\rho_m > 0$ y considerando a que a nivel cosmológico la presión de esa materia es despreciable, esto es, tomando $p_m = 0$. Para un hipotético 'gas de Galaxias' la hipótesis $p_m = 0$ es una muy buena aproximación, dado que cada galaxia está extraordinariamente alejada de sus vecinas. En esta sección emplearemos un subíndice m en la densidad que escribiremos como ρ_m para recordar que se trata de la densidad de materia, en contraste con las densidades que que discutiremos después para la radiación y para el el vacío.

Las ecuaciones (46) de evolución de ρ dan en este caso:

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m \tag{47}$$

que escrita como $\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} = -3\frac{\dot{a}}{a}$ se integra y conduce de manera inmediata a la relación

$$\rho_m(t)a^3(t) = cte \tag{48}$$

que puede verse como la ecuación de conservación de la masa en el universo. Intuitivamente esta ecuación es muy clara: en una región del espacio determinada por un cierto dominio de coordenadas comóviles, la cantidad de materia contenida se mantiene constante a lo largo de la evolución, pero el volumen de esa región cambia como consecuencia de la expansión cosmológica como $a^3(t)$, con lo que la densidad deberá cambiar como $a^{-3}(t)$.

Para un hipotético universo en el cual el gas de galaxias es la única fuente de gravedad, es posible dar una solución *explícita* de las ecuaciones de Friedmann. Antes comentamos que habiendo varias funciones que dependen de t, ligadas entre sí pero con dependencias diferentes, conviene tratar de desacoplar lo más posible estas dependencias, y el camino más eficiente para hacerlo es encontrar una ecuación que involucre *solamente* al factor de escala. Esto es posible: veamos cómo.

Para este caso, en el que $p_m(t) = 0$ y habida cuenta que acabamos de encontrar la evolución de la densidad como $\rho_m(t) = \frac{C'}{a^3(t)}$, la primera ecuación de Friedmann queda

$$\frac{1}{a^2(t)}\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{C'}{a^3(t)} - \frac{kc^2}{a^2(t)} \tag{49}$$

en donde multiplicando por $a^2(t)$ se obtiene

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{C'}{a(t)} - kc^2 \tag{50}$$

que puede reescribirse introduciendo una constante $C = \frac{8\pi G}{3}C'$ como

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a(t)} - kc^2 \tag{51}$$

Esta es la ecuación buscada.

• COMENTARIO 10.16. Conviene entender que aquí k no debe verse como un dato inicial, sino como una cantidad que puede tomar solamente los valores $k = 1, 0, -1$, dependiendo del resultado de comparar la densidad actual $\rho_m(t_0)$ con la densidad *crítica* actual; el valor k agrupa la dependencia temporal de la expresión (38) en una cantidad que es constante a lo largo de la evolución, y realmente esta agrupación es la clave para encontrar una ecuación en la que el factor de escala sea la única incógnita.

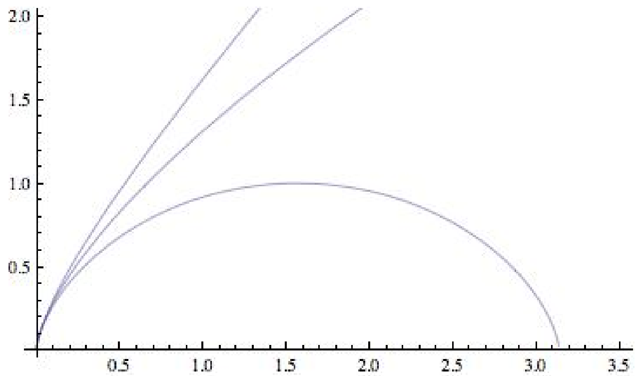
En los tres casos $k = 1, 0, -1$ esta ecuación admite una solución exacta. La solución se encuentra directamente por integración elemental en el caso $k = 0$ y en los otros dos casos es expresable en forma paramétrica en términos de un parámetro que se denomina η.

• EJERCICIO 10.6. Notar y explorar la analogía (prácticamente completa) de esta ecuación con la ecuación de movimiento del problema de Kepler en Mecánica clásica. En particular, relacionar el parámetro η con la anomalía excéntrica del problema clásico de Kepler.

En los tres casos, la evolución hacia el pasado conduce *inevitablemente* a que el factor de escala $a(t)$ se debió anular en cierto valor pasado de t, que es convencional tomar como origen de tiempos. Ya con esta elección de origen, la forma precisa de la solución, en los tres casos $k = 1, 0, -1$ adopta en el sistema de unidades con $c = 1$ la forma siguiente:

Pendiente chequear y reescribir con todas las ctes explícitas

$$\begin{cases} k = 1,\ \Omega > 1, \quad a(\eta) = \frac{1}{2}C(1-\cos\eta), \qquad t(\eta) = \frac{1}{2}C(\eta - \sin\eta) \\ k = 0,\ \Omega = 1, \qquad\qquad a(t) = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} \\ k = -1,\ \Omega < 1, \quad a(\eta) = \frac{1}{2}C(\cosh\eta - 1), \qquad t(\eta) = \frac{1}{2}C(\sinh\eta - \eta) \end{cases} \tag{52}$$



La gráfica muestra el comportamiento de la función $a(t)$ frente a t en los tres casos, y en ella se ven directamente dos propiedades de importancia fundamental:

- la dependencia de t tiene en los tres casos $k = 1, 0, -1$ carácter *convexo* y
- es inevitable la existencia de una *singularidad inicial* en la que $a = 0$, que con la elección de origen de tiempos que hemos comentado antes ocurre para $t = 0$ ($\eta = 0, a(0) = 0$).

Se conoce a esta singularidad como el '*Big Bang*'. Si actualmente $a(t)$ es creciente (constante de Hubble positiva, o expansión, que es la situación observada en la actualidad), entonces esta situación actual proviene de un estado inicial en cierto instante pasado —que es convencional tomar como origen de tiempos— en el que $a(0) = 0$ y $H(0) = +\infty$. La escala $a(t)$ lleva creciendo desde entonces y la constante $H(t)$ lleva disminuyendo desde entonces, hasta llegar a sus valores actuales.

Por tanto en un universo cuya única fuente de gravedad fuera la materia ordinaria, la evolución futura depende del signo de k, o, lo que es lo mismo, de si la densidad actual es mayor, igual o menor que la densidad crítica. La actual expansión llevaría ralentizándose desde la singularidad inicial, y seguiría ralentizándose en el futuro próximo debido al carácter convexo de las funciones $a(t)$ en todos los casos.

El comportamiento a largo plazo temporal es diferente según que $k = 1$ o que $k = 0, -1$. En el caso $k = 1$, (que ocurre cuando la densidad es *mayor que la crítica*), el crecimiento de $a(t)$ se detiene en un cierto momento cosmológico futuro (en el que $H = 0$) para iniciar una fase de compresión, en la que $a(t)$ disminuye con el tiempo (etapa en la que la constante de Hubble sería negativa y el Universo estaría comprimendose), que acabará en un 'Big Crunch' simétrico y temporalmente reverso al Big Bang. En los otros dos casos $k = 0$ o $k = -1$ la expansión continuará para siempre, ralentizándose progresivamente, y la constante de Hubble seguirá disminuyendo, con un comportamiento asintótico cuando $t \to \infty$ que tiende a 0 en el caso $k = 0$ y a un valor positivo cuando $k = -1$.

El 'Big Bang' es la segunda predicción inevitable de la cosmología relativista (considerando la expansión y al desplazamiento al rojo cosmológico como la primera).

Quien primero formuló la predicción de una singularidad inicial fue el cosmólogo belga abate G. Lemaître, quien la propuso en 1927, en una forma ligeramente diferente (Lemaître hablaba del 'átomo primigenio' y de 'un día sin ayer'). El nombre actual lo acuñó F. Hoyle en la década de los 1950.

- COMENTARIO 10.17. Se suele decir que Hoyle usó ese término algo ridículo de 'Gran Explosión' con ánimo de ridiculizar la idea, pero esto es posiblemente una leyenda urbana, aunque de juzgar por el carácter de Hoyle bien podría ser cierta ya que Hoyle era todo un personaje que no se callaba cuando pensaba que debía hablar, cosa que hizo por ejemplo al criticar que el comité Nobel no hubiera incluído a Jocelyn Bell en el Nobel concedido por el descubrimiento del primer pulsar en 1974 a A. Hewish, el supervisor del trabajo de J. Bell que fue realmente quien hizo el descubrimiento (y que más adelante posiblemente le costó el Nobel a él mismo).

- COMENTARIO 10.18. Hoyle defendía otra propuesta, basada en lo que se conoce como 'principio cosmológico perfecto' que añade al principio cosmológico ordinario la hipótesis de homogeneidad temporal. Resulta que para que un modelo de este tipo sea compatible con las ecuaciones de Einstein se requiere una *creación continua de materia* (a un ritmo muy bajo) en todo el espacio. Actualmente la teoría de Hoyle se considera descartada, ya que en ella no tiene explicación el fondo cósmico de microondas

En este momento de nuestra exposición puede y debe surgir una pregunta: ¿hasta qué punto la suposición de que la fuente cosmológica de la gravedad sea exclusivamente la materia es razonable? Y ¿hasta qué punto la consideración de otras fuentes de la gravedad pueden modificar las anteriores conclusiones?

Vamos a ver en el resto de estas notas estas cuestiones.

2.8. Modelos cosmológicos de FLRW con sólo radiación

El Universo está bañado por radiación electromagnética (una parte visible, y otra en la región invisible del espectro, desde los rayos gamma hasta el fondo cósmico de microondas o en la región de radio), cuyo efecto como fuente de gravedad está descrito por el correspondiente tensor de esfuerzos del campo electromagnético, que se estudió en su momento. De aquel estudio sabemos que la traza del tensor energía-esfuerzo de una onda electromagnética es nula. Esta condición, cuando se aplica al caso concreto del tensor de energía-esfuerzo para la radiación existente en un universo en el que se verifique el principio cosmológico (que debe satisfacer la condición de homogeneidad espacial e isotropía), implican la siguiente relación entre densidad de energía y presión

$$\frac{1}{c^2}\mathcal{E}_r(t) - \frac{1}{c^2}3\,p_r(t) = 0 \tag{53}$$

o lo que es lo mismo, $p_r(t) = \frac{\mathcal{E}_r(t)}{3}$. Así pues, la ecuación de estado correspondiente a la radiación, esto es, la relación entre densidad de energía y presión, traducida la densidad de energía a la escala de masas $\rho_r(t) = \frac{\mathcal{E}_r(t)}{c^2}$ es:

$$\frac{p_r(t)}{c^2} = \frac{\rho_r(t)}{3} \tag{54}$$

En consecuencia, para la radiación, la ecuación básica de evolución de ρ_r (46) lleva a

$$\dot{\rho}_r = -3\,\frac{\dot{a}}{a}\frac{4}{3}\,\rho_r = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r \tag{55}$$

que por integración conduce de manera inmediata a la relación

$$\rho_r(t)\,a^4(t) = \text{cte} \tag{56}$$

ecuación que puede verse como la ecuación de conservación (local) de la energía contenida en la radiación en el universo.

Inicialmente puede sorprender que para la radiación la ley de evolución de la densidad sea diferente de la de la materia, ya que el factor $a(t)$ interviene aquí a la *cuarta potencia*, en vez de al cubo, que era la dependencia encontrada para la densidad de materia y que parecería la evolución 'natural'. Es fácil dar una explicación física: en una región dada del espacio, determinada por un cierto dominio de coordenadas comóviles, el número de fotones contenidos se mantiene constante a lo largo de la evolución (por el principio cosmológico), pero además del cambio de volumen que se daba para la materia ordinaria, la *energía de cada fotón también cambia también con la expansión del universo* (su longitud de onda cambia con el factor de escala), lo que añade un factor $a(t)$ extra al $a^3(t)$ que proviene del cambio 'de volumen'.

Para un hipotético universo en el cual la radiación fuera la única fuente de gravedad también es posible dar una solución *exacta* de las ecuaciones de Friedmann. Para este caso acabamos de encontrar la ley explícita de evolución temporal de la densidad como $\rho_r(t) = \frac{C'_r}{a^4(t)}$, por lo que la primera ecuación de Friedmann queda

$$\frac{1}{a^2(t)}\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{C'_r}{a^4(t)} - \frac{kc^2}{a^2(t)} \tag{57}$$

en donde multiplicando por $a^2(t)$ se obtiene

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{C'_r}{a^2(t)} - kc^2 \tag{58}$$

que puede reescribirse finalmente introduciendo una constante $C_r = \frac{8\pi G}{3}C'_r$ como

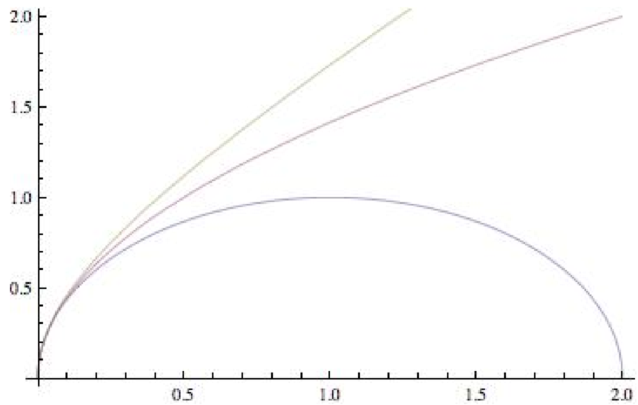
$$\dot{a}^2 = \frac{C_r}{a^2(t)} - kc^2 \tag{59}$$

Vemos que también en el caso de radiación es posible encontrar una ecuación en la que la única incógnita sea el factor de escala. Difiere de la del caso de materia en una dependencia en $a^{-2}(t)$ en el primer término del miembro derecho, mientras que para materia esta dependencia era en $a^{-1}(t)$. Esta ecuación admite una solución exacta, que puede obtenerse directamente. Es notable que la evolución del factor de escala sea *cualitativamente semejante* a la que ocurre para un universo que contenga exclusivamente materia. También aquí, en los tres casos, la evolución hacia el pasado conduce inevitablemente a que el factor de escala $a(t)$ se debió anular en cierto valor pasado de t, que es convencional tomar como origen de tiempos. Ya con esta elección, la forma precisa de la solución, en los tres casos $k = 1, 0, -1$ y en el sistema de unidades con $c = 1$ es:

Pendiente: Check,... reescribir con todas las ctes explícitas; explorar escritura a la CK!

$$\left\{\begin{array}{ll} k=1,\ \Omega>1, & a(t) = \left(1-\left(1-t\sqrt{C_r}\right)^2\right)^{1/2} \\ k=0,\ \Omega=1, & a(t) = (4C_r)^{1/4}t^{1/2} \\ k=-1,\ \Omega<1, & a(t) = \left(\left(1+t\sqrt{C_r}\right)^2-1\right)^{1/2} \end{array}\right. \tag{60}$$

Vemos pues que las conclusiones que obtuvimos antes trabajando con un universo que contenga exclusivamente materia *se mantienen cualitativamente* si el universo contuviera solamente radiación. Sigue habiendo una singularidad inicial en la que $a = 0$, la evolución de la función $a(t)$ es convexa y por tanto la constante de Hubble *disminuye con el tiempo* y el destino futuro del universo es expansión indefinida para $k = -1$ y $k = 0$ y expansión decreciente seguida por una fase de recontracción creciente que acaba en otra singularidad ('Big Crunch') si $k = 1$. Las diferencias entre la evolución de un universo con solo materia o solo radiación son solamente cuantitativas, pero no cualitativas.

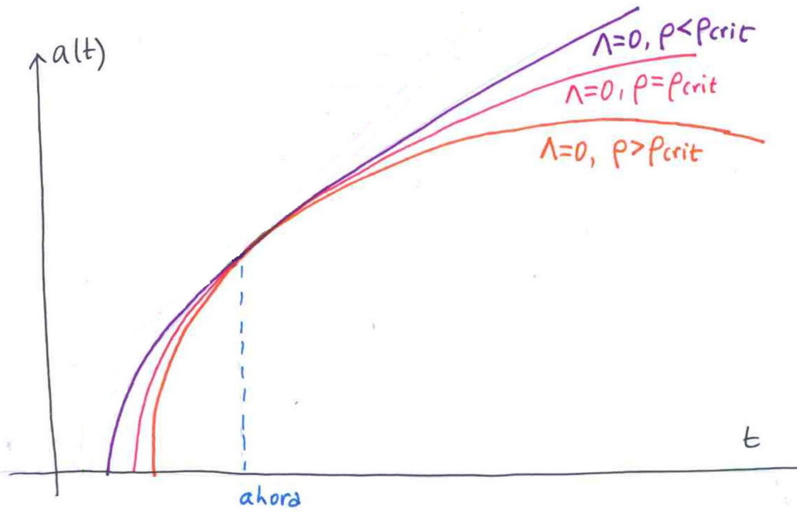


2.9. Modelos cosmológicos de FLRW con materia y radiación: las fases de dominancia de radiación y materia

Ninguno de los dos casos idealizados anteriores se da en la Naturaleza. Nuestro Universo contiene, al menos, ambos ingredientes: materia (galaxias) y radiación. ¿Como se puede tomar en consideración ambas componentes a la vez? Sean $\rho_m(t_0)$ y $\rho_r(t_0)$ las densidades de materia y radiación en el instante cosmológico actual (ambas en escala de masas). La clave en el análisis de esta cuestión es apreciar que las densidades de materia y de radiación tienen diferente evolución con el factor de escala. La densidad de materia cambia con el tiempo cosmológico con un factor $1/a^3(t)$, mientras que la de radiación lo hace con un factor $1/a^4(t)$. Los valores actuales de $\rho_m(t_0)$ y $\rho_r(t_0)$ muestran que entre la materia y la radiación la componente actualmente dominante es la materia: $\rho_m(t_0)$ supera a $\rho_r(t_0)$ en cinco órdenes de magnitud. Pero en los momentos cosmológicos inmediatamente posteriores al Big Bang (cuando $a(t)$ era muy pequeño), es evidente que la densidad de radiación *habrá sido la parte dominante* en un cierto intervalo del tiempo cosmológico, entre $t = 0$ y cierto t_d, mientras que para valores de t mayores que t_d la componente dominante habrá pasado a ser la materia. En consecuencia, para el caso en que las fuentes del campo comprendan a la vez materia y radiación, con la materia actualmente dominante, la solución completa de las ecuaciones de Friedmann será cualitativamente semejante a la de un universo que contuviera principalmente radiación en la etapa temprana de la vida del Universo, y pasará a ser cualitativamente semejante a la de un universo con solo materia en la etapas posteriores. Estas etapas posteriores durarán para siempre en los casos $k = 0, -1$ y en el caso $k = 1$ durarán solamente hasta que la eventual recontracción conduzca a una nueva fase de dominancia de la radiación inmediatamente antes del Big Crunch que ocurrirá en ese caso.

A cada una de estas fases se las denomina universo dominado por la radiación y universo dominado por la materia.

Si la dicotomía fuera solamente entre 'universo dominado por la radiación' y 'universo dominado por la materia', la situación actual sería claramente la de 'universo dominado por la materia' ya que como hemos indicado la densidad de energía de radiación es actualmente mucho menor (en unos cinco órdenes de magnitud) que la debida a la materia. Pero hoy día creemos que hay al menos una tercera fuente de campo gravitatorio a nivel cosmológico, la llamada energía obscura, que como vamos a ver está llamada a modificar la imagen anterior de una manera sustancial.



3. La constante cosmológica

La consecuencia primera y más elemental de la cosmología relativista es que el universo no es estático, y que la distancia entre galaxias está cambiando de acuerdo con la ley de Hubble. Entre las posibilidades permitidas por la teoría de la gravedad de Einstein aplicada al Universo en su conjunto vía el principio cosmológico no aparece un Universo estático.

Para convencernos de ello, preguntémonos si puede existir alguna solución de las ecuaciones de FLRW en la que el factor de escala $a(t)$ fuera *independiente de* t. De hecho, la esperanza de que esta pregunta debía tener una respuesta afirmativa era la preconcepción de Einstein antes de abordar la aplicación de su teoría para estudiar la estructura del Universo en su conjunto.

Si la pregunta la planteamos con las ecuaciones de Friedmann, entonces vemos que la respuesta es negativa. Es evidente que la función $a(t) = cte$ solo puede ser solución de las ecuaciones de Friedmann en el caso $\rho(t) = 0,\ p(t) = 0,\ k = 0$, caso que corresponde un universo vacío de materia y energía, y con curvatura espacial nula; en resumen, que corresponde al espacio de Minkowski. Desde luego el espacio de Minkowski es estático, pero no es realista como modelo cosmológico, al no contener materia.

Confrontado con esta dificultad, en el artículo de 1917 que marca el inicio de la cosmología relativista, Einstein propuso una *modificación* de las ecuaciones del campo gravitatorio, introduciendo la llamada *constante cosmológica*. El motivo original de Einstein para tal modificación era conseguir una solución estática para el Universo, algo que en el lenguaje anterior correspondería a una solución con $a(t) = \mathrm{cte}$ de las ecuaciones del modelo cosmológico de FLRW, cosa que ya hemos visto que no es posible. En un intento a la desesperada, Einstein forzó su propia teoría hasta conseguir una solución correspondiente a un Universo estático, con un parche que consiste en suponer que en el vacío la curvatura escalar del espacio-tiempo fuera no nula. Esto es equivalente a añadir al tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ un término $-\Lambda\, g_{\mu\nu}$, en donde a diferencia del $R\, g_{\mu\nu}$ que involucra a la curvatura escalar R que depende de la métrica, el coeficiente Λ es una constante universal. Dimensionalmente (con las convenciones que estamos siguiendo) esta constante tiene dimensiones T^{-2}.

Matemáticamente, este añadido es perfectamente defendible: la adición de este término no altera la anulación automática de la divergencia covariante del nuevo $\tilde{G}_{\mu\nu}$ modificado, una exigencia que como vimos era central en la filosofía de la Relatividad General.

- COMENTARIO 10.19. De hecho, puede demostrarse (teorema de Lovelock) que la adición de un término tipo constante cosmológica $-\Lambda g_{\mu\nu}$ al tensor de Einstein es la modificación más general de $G_{\mu\nu}$ que asegura la anulación automática de la divergencia covariante del nuevo $\tilde{G}_{\mu\nu}$ modificado.

Pues bien, permitiendo este término, Einstein encontró que para un valor particular *crítico* Λ_c de Λ, las nuevas ecuaciones cosmológicas (con el nuevo término), permitían una solución con $a(t) = \text{cte}$, esto es, un Universo estático. El prejuicio de muchos siglos previos a favor de esta idea era realmente muy fuerte, y Einstein perdió la oportunidad de tomar en serio la predicción más espectacular de su propia teoría de la gravedad, la expansión del Universo. Una vez descubierta observacionalmente la expansión (por Hubble), la razón de ser original de la propuesta de una constante cosmológica perdió vigencia muy rápidamente y es bien conocida y demasiado repetida la frase de Einstein de que la introducción de la constante cosmológica fue el mayor error de su vida.

En los últimos años se ha producido una segunda venida de la idea de una constante cosmológica, por motivos diferentes a los originales que llevaron a la propuesta inicial. Para exponer esta cuestión, tomemos como punto de partida el resultado matemático según el cual la modificación más general $\tilde{G}_{\mu\nu}$ del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que mantiene la anulación automática de la divergencia covariante del $\tilde{G}_{\mu\nu}$ modificado es precisamente la adición de un término $-\Lambda g_{\mu\nu}$ a $G_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Einstein con esta modificación se escribirían

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \tag{61}$$

en donde Λ es una constante universal, característica de la geometría del espacio-tiempo. (El elemento T_{00} es la densidad de energía, y T_{00}/c^2 es la densidad 'de masa').

Pero las ecuaciones de Einstein permiten un cierto 'baile' entre sus miembros derecho e izquierdo: el nuevo término $-\Lambda g_{\mu\nu}$, que inicialmente está en la mitad 'geométrica' de la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \tag{62}$$

puede 'trasladarse' a la mitad 'física', obteniendo

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu} + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) \tag{63}$$

y una vez allí las ecuaciones que resultan puede *reinterpretarse* como si fueran las ecuaciones de Einstein *convencionales* para un tensor energía–esfuerzo que además de la parte que previamente considerábamos como las fuentes del campo ($T_{\mu\nu}$) contiene una parte nueva, proporcional a la métrica, con la constante cosmológica Λ como coeficiente de proporcionalidad. Como esta parte daría una contribución al nuevo tensor energía-esfuerzo incluso en lo que antes llamábamos vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) es natural interpretar la parte nueva del *tensor de energía–esfuerzo como la densidad de energía-esfuerzos correspondiente al vacío.*

Así vista, la constante cosmológica adquiere una interpretación alternativa: traduce el hecho de que el vacío tiene cierta densidad de energía, que habrá que añadir al tensor energía–esfuerzo del resto de las fuentes cosmológicas del campo (esto es, a la densidad de masa y la presión isótropa ambas homogéneas). Con esta interpretación, en las ecuaciones modificadas se mantiene en el miembro izquierdo el tensor de Einstein ordinario, y en la parte derecha se añade la parte 'de vacío' del tensor de energía-esfuerzo

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu} + \overset{\text{vac}}{T}_{\mu\nu} \right), \qquad \overset{\text{vac}}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu} \tag{64}$$

Por tanto vemos que permitir una constante cosmológica no nula es totalmente equivalente a asumir que el vacío es un medio que tiene cierta densidad de energía y cierta presión, descritas en el tensor de energía-esfuerzo $\overset{\text{vac}}{T}_{\mu\nu}$ que habrá que añadir a la de los restantes medios materiales o la radiación que hemos discutido antes.

Hay otro camino más físico para determinar cómo podría ser el tensor de esfuerzo-energía del vacío, supuesto que el vacío tenga realmente un contenido energético. Para ello, aceptemos la hipótesis de que lo que un observador localmente inercial ve como el vacío debe ser visto por todos los observadores localmente inerciales como el vacío. Inmediatamente se concluye que el correspondiente tensor esfuerzo-energía (que siempre es simétrico) debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz locales. El único tensor de segundo orden que tiene tal invariancia es la propia métrica, lo que deja como única posibilidad para el tensor esfuerzo-energía del vacío ser un múltiplo escalar del tensor métrico.

Resulta que la única modificación posible de las ecuaciones de Einstein que mantiene la anulación automática de la divergencia del 'tensor de Eintein modificado' consiste en añadir precisamente un término $-\Lambda g_{\mu\nu}$ de este tipo al lado 'geométrico' de la ecuación de Einstein, que al ser trasladado al lado 'físico' concuerda completamente con la exigencia de que el tensor de energía-esfuerzo del vacío sea *proporcional al tensor métrico*:

$$\overset{\text{vac}}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu} \tag{65}$$

Esta expresión corresponde a una densidad de energía de vacío $\mathcal{E}_v = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}$ y a una 'densidad equivalente de masa' $\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Si queremos que la *energía del vacío sea positiva*, entonces deberemos imponer $\Lambda > 0$.

- COMENTARIO 10.20. Hay discrepancias entre los convenios y notaciones sobre la constante cosmológica, que deberán vigilarse al hacer comparaciones; en concreto, y aparte de factores puramente numéricos y/o de signo, es muy frecuente llamar constante cosmológica a la cantidad con dimensiones L^{-2}, que en nuestra notación escribimos como $c^2\Lambda$. Asimismo dependiendo del convenio de signo para $g_{\mu\nu}$, el signo en la expresión que da $T_{\mu\nu}$ en función de $g_{\mu\nu}$ puede ser el contrario. La condición neta que debe aplicarse para determinar el signo físicamente correcto de la constante cosmológica, con independencia de los convenios, es que la densidad de energía del vacío debe ser *positiva*; con los convenios de estas notas esto se traduce en la condición $\Lambda > 0$.

Por lo tanto, una constante cosmológica no nula puede verse también como una manifestación de que el vacío tiene una cierta densidad de energía.

La introducción de un valor no nulo para Λ en general modifica las predicciones de la teoría original de Einstein. Dado el excelente acuerdo de la teoría original (en la que $\Lambda = 0$) con las observaciones en el sistema solar, se puede dar una cota para densidad de masa equivalente a la constante cosmológica $\rho_\Lambda < 2\cdot 10^{-21}\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, lo que corresponde a un valor para $\Lambda < 3{,}35 \cdot 10^{-27}\,\text{sg}^{-2}$. Esto no debe entenderse como el valor presumible de Λ, sino como una *cota superior* que excluye para dicha constante cualquier valor mayor que esa cota pues en tal caso las predicciones de la teoría con constante cosmológica discreparían sustancialmente de las observaciones en el sistema solar. Como tal cosa no se ha observado, esto naturalmente excluye el rango de posibles valores de Λ mayores que esta cota.

3.1. La energía del vacío como fuente de campo gravitatorio

Si realmente la constante cosmológica es no nula, su efecto en las ecuaciones de Friedmann puede verse de dos maneras completamente equivalentes en lo que respecta a las predicciones. Una sería reemplazar las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica por las ecuaciones con constante cosmológica, manteniendo el tensor esfuerzo-energía de las fuentes ordinarias del campo, y encontrando las 'nuevas' ecuaciones de FLRW. En la otra no hay necesidad de modificar las ecuaciones originales de Einstein, ni las ecuaciones de Friedmann, y basta *añadir* una componente 'de vacío' al tensor de energía-esfuerzo de la materia y de la radiación.

La equivalencia completa de ambas maneras de proceder proviene de la posibilidad de bascular el nuevo término $-\Lambda g_{\mu\nu}$ entre los miembros izquierdo y derecho de las ecuaciones de Einstein.

Si adoptamos el segundo de estos dos puntos de vista, no es necesaria ninguna modificación en las ecuaciones de Friedmann ni en la de la evolución de la densidad, y bastará tomar en consideración un tercer tipo de fuente de campo gravitatorio, la 'densidad de energía del vacío', a la que se conoce como *energía oscura*. Hay que entender que antes de incorporar la constante cosmológica, el vacío corresponde a un medio con tensor energía-esfuerzo idénticamente nulo, pero ahora eso ya no será así.

La densidad (de masa) y la presión son las componentes diagonales del tensor de esfuerzo-energía en un sistema de coordenadas de tipo localmente galileano asociado a los observadores fundamentales. En torno a cada suceso, tomado como suceso origen en esas coordenadas, el tal tensor para el vacío debe ser de la forma

$$T^{00}\big|_O = \mathcal{E}(t)/c^2 = \rho(t), \qquad T^{11}\big|_O = T^{22}\big|_O = T^{33}\big|_O = p(t), \qquad \text{demás } \; T^{\mu\nu}\big|_O = 0 \tag{66}$$

y debe expresarse en términos del tensor métrico por

$$\overset{\text{vac}}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu} \tag{67}$$

y dado que la métrica (sus componentes contravariantes) en un sistema localmente galileano de coordenadas está dada en el suceso origen por

$$g^{00}\big|_O = 1 \qquad g^{11}\big|_O = g^{22}\big|_O = g^{33}\big|_O = -c^2, \tag{68}$$

se concluye enseguida algo sorprendente para el tensor de energía-esfuerzos del 'vacío': si la densidad $\rho_\nu(t)$ es positiva (lo que con nuestros convenios determina el signo positivo de la constante Λ), entonces las tres componentes diagonales espaciales del tensor de energía-esfuerzo son *negativas*, lo que lleva a una predicción intrigante pero inevitable:

La presión del vacío es negativa, $p_\nu(t) = -\mathcal{E}_\nu(t) = -\rho_\nu(t)c^2$.

En las ecuaciones (11) y (46) (respectivamente la segunda ecuación de Friedmann y la ecuación de evolución temporal de la densidad) aparecen las combinaciones $\left(\rho_\nu(t) + \frac{3p_\nu(t)}{c^2}\right)$ y $\left(\rho_\nu(t) + \frac{p_\nu(t)}{c^2}\right)$. Cuando estas cantidades se calculan para el tensor de esfuerzos del vacío, los valores que resultan para estas dos combinaciones son respectivamente $-2\rho_\nu(t)$ y 0. Cada uno de estos valores proporciona una sorpresa.

La primera sorpresa procede de la ecuación de evolución de la densidad $\rho_\nu(t)$, que es la ecuación (46). Para el caso de la densidad del vacío, como $\left(\rho_\nu(t) + \frac{p_\nu(t)}{c^2}\right) = 0$ la ecuación obtenida es:

$$\dot{\rho}_\nu(t) = 0 \tag{69}$$

de manera que la densidad (de energía) del vacío *no cambia a lo largo de la evolución cosmológica* (¡independientemente de la expansión!). Esto es,

Aunque el universo se expanda, la densidad de energía del vacío se mantiene constante a lo largo del tiempo.

Esto desafía de manera completa a cualquier intuición, pero es lo que inequívocamente dicen las ecuaciones.

La otra sorpresa ocurre en la segunda ecuación de Friedmann, en la que para el vacío la combinación $\left(\rho_\nu(t) + \frac{3p_\nu(t)}{c^2}\right)$ resulta ser *negativa*, con valor $-2\rho_\nu(t)$. Dado que precisamente esta combinación es la que reemplaza en relatividad a la simple densidad de masa como fuente 'directa' del campo gravitatorio, el valor negativo para dicha combinación indica que la constante cosmológica actúa *efectivamente* como 'gravitación repulsiva' (¡aunque su densidad de energía sea positiva!).

En consecuencia, para un hipotético universo que careciera de materia y de radiación, pero que tuviera solamente 'energía de vacío', la segunda ecuación de Friedmann hace que la segunda derivada de la función $a(t)$ tenga el signo *opuesto* al que resulta para un universo con materia o con radiación. Esto quiere decir que la evolución cosmológica de la función $a(t)$ producida por la energía de vacío está descrita por una gráfica que no es convexa sino cóncava: lo que esto significa es que con esa fuente, la expansión del Universo no es decelerada, como las que hemos encontrado antes para la energía y la radiación, sino que *es acelerada*.

• EJERCICIO 10.7. Encontrar las soluciones exactas de las ecuaciones de FLRW para un universo con exclusivamente energía de vacío, pero sin materia ni radiación. Comparar con los resultados exactos obtenidos para los casos de exclusivamente materia y exclusivamente radiación. En particular, comprobar que ahora la función $a(t)$ (que en este caso es muy fácil de calcular explícitamente de manera exacta) no tiene carácter convexo.

3.2. Modelos cosmológicos de FLRW con materia, radiación y energía de vacío: las fases de dominancia

La densidad de la energía de vacío no cambia con la evolución cosmológica (ver (69)). Significa esto que por pequeña que sea en un momento dado esta densidad energía, desde un punto de vista cosmológico, en los casos $k = 0$ y $k = -1$ de universos abiertos, a consecuencia de la evolución la densidad de energía de vacío acabará a la larga siendo el término dominante.

En el caso $k = 1$, dependiendo del valor de la densidad de materia y/o radiación en el momento de máximo tamaño, la energía oscura podrá o no llegar a ser el término dominante, aunque su importancia relativa siempre será mayor cuanto mayor sea el tamaño del universo. Cuando se modela según las ecuaciones de FLRW la evolución de un universo que contenga *radiación, materia y energía de vacío*, la evolución del factor de escala comienza siendo convexa, pero cambia a cóncava cuando el término de energía de vacío pase a ser dominante.

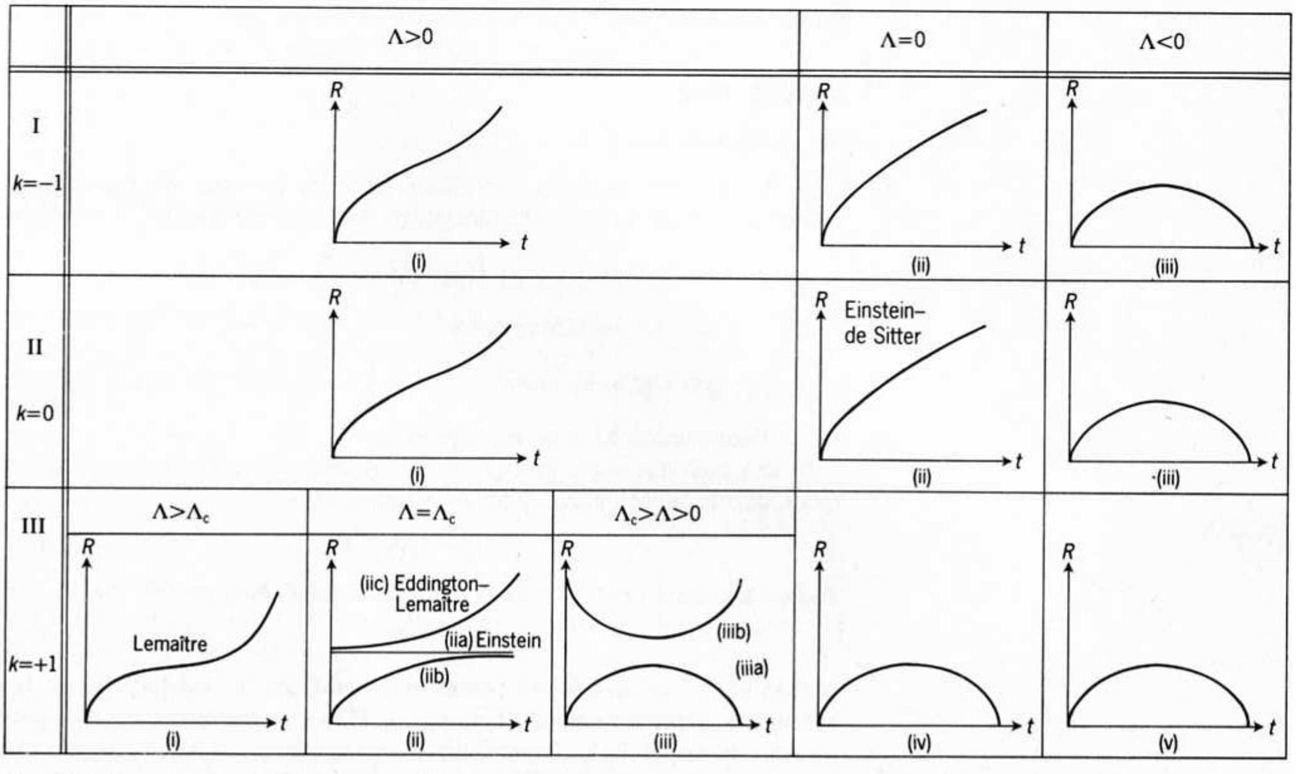


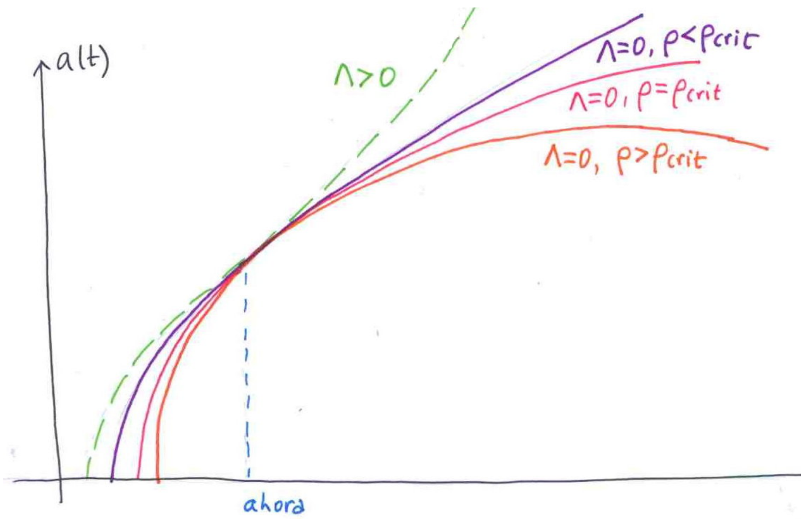
Fig. 23.1 Classification of Friedmann models.

• COMENTARIO 10.21. El gráfico adjunto, tomado del texto de d'Inverno, muestra cualitativamente la evolución temporal del factor de escala con el tiempo cosmológico (nuestro factor de escala a aparece denotado R en las gráficas). La columna central corresponde a la evolución de $a(t)$ que hemos encontrado para los casos en que la fuente sea materia, radiación o cualquier combinación de ambas, pero sin constante cosmológica. Si la constante cosmológica fuera no nula, podrían considerarse (como posibilidades alternativas) los dos casos $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$.

El caso $\Lambda > 0$ es el que nosotros hemos supuesto en estas notas (y el que se cree corresponde a la naturaleza!). La expansión es siempre decelerada cuando se supone $\Lambda = 0$. Pero si suponemos $\Lambda > 0$ la expansión es inicialmente decelerada, pero cambia de carácter y pasa a ser una expansión acelerada a partir de cierto momento cosmológico, —precisamente cuando la energía de vacío pasa a ser la contribución dominante en términos de densidad de energía—. En los dos casos $k = 0, -1$ esto ocurre en un cierto instante cosmológico y a partir de él la expansión es acelerada para siempre, mientras que si $k = 1$ hay tres subcasos, dependiendo del valor Λ respecto a un valor crítico Λ_c, y una evolución diferente dependiendo de que Λ sea mayor/igual/menor a Λ_c. El caso $k = 1$, $\Lambda = \Lambda_c$ es el *único* en que existe un universo estático (indicado por una gráfica horizontal para R en la figura, rotulado '(iia) Einstein') y fue precisamente el propuesto por Einstein en 1917 (para salvar la idea de un universo estático). Conviene tener presente que el universo estático de Einstein requiere un valor exactamente preciso de la constante cosmológica; se intuye de estas gráficas sin gran dificultad que un tal modelo de universo estático es inestable ante pequeñas perturbaciones, dificultad que fue pronto evidente tras la propuesta inicial de la constante cosmológica por parte de Einstein y que contribuyó a que esta idea fuera pronto desechada en aquella época.

El caso del 'otro' signo para la constante cosmológica, esto es, $\Lambda < 0$ conduce *siempre* a un Big Crunch, independientemente del valor de $k = 1, 0, -1$; esto es fácil de entender pues como en tal caso la densidad de energía del vacío sería negativa, la combinación $\left(\rho_v(t) + \frac{3p_v(t)}{c^2}\right) = -2\rho_v(t)$ resultaría ser *positiva* y el valor positivo de esta cantidad indica que una constante cosmológica negativa actúa efectivamente como 'gravitación atractiva' (aunque su densidad de energía sea negativa!) que es capaz de contrarrestar y a la larga dominar sobre la tendencia inicial a la expansión, y esto, en ese caso independientemente del signo de k.

Esto es, *a las dos fases de dominancia de la radiación y de la materia* que discutimos en la sección anterior, hay que añadir ahora una tercera posibilidad, la de dominancia *de la energía oscura o de la energía de vacío*. Y desde el punto de vista observacional, cuando la energía de vacío resulte dominante la expansión del Universo será una *expansión acelerada* (una posibilidad que no puede ocurrir en ningún caso si la fuente es exclusivamente bien materia o bien radiación).



Todas las observaciones hasta la fecha son consistentes con un universo actualmente en expansión. Ahora creemos que en la actualidad esta expansión es acelerada

Desde el descubrimiento de Hubble a finales de los 1920s hasta 1998 la expansión se suponía decelerada. La 'medida' o la observación del valor de la deceleración (a través del llamado parámetro de Sandage q) es indirecta y extraordinariamente delicada, y no habiendo ninguna evidencia de expansión acelerada, lo habitual hasta 1998 era dar por hecho que la expansión *era decelerada*, ya que este carácter es el que se deriva de las ecuaciones de FLRW sin término cosmológico. Pero observaciones publicadas en 1998 por dos equipos (liderados por Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt, y Adam G. Riess, premio Nobel 2011) indican, con bastante fiabilidad, que el universo actual se encuentra en expansión *acelerada*. Aceptar un valor no nulo y positivo de la constante cosmológica (o de la densidad de energía del vacío) es la *explicación más sencilla* para esta observación.

4. El Universo, a la luz de los modelos actuales: energía oscura y materia oscura

El análisis de las inhomogeneidades del fondo cósmico de microondas, y de su espectro de potencia sugiere muy fuertemente un universo crítico (con $\Omega = 1$). El modelo actualmente aceptado (muy mayoritariamente), llamado Modelo Cosmológico concordante o Cosmología ΛCDM (Λ por la constante cosmológica. CDM por *Cold Dark Matter*) toma como punto de partida que nuestro Universo es un universo crítico (con una densidad total de energía igual a la crítica), con un reparto entre las componentes de radiación, materia y energía de vacío con fracciones del orden de $\Omega_r \approx 5 \times 10^{-5}$, $\Omega_m \approx 0{,}3$ y $\Omega_v \approx 0{,}7$. La incertidumbre en estos ajustes es relativamente pequeña, de manera que dentro de los actuales modelos, debemos tomar estos valores seriamente. Estos valores resultan de ajustar las predicciones teóricas —cuyos primeros desarrollos hemos presentado en este breve resumen— con las observaciones, especialmente del fondo cósmico de microondas, que es el residuo fósil de un momento temprano llamado por motivos indescifrables de la recombinación, en que el universo tenía una edad de unos 380.000 años y al bajar la temperatura los electrones se ligaron a los núcleos formando por primera vez la materia ordinaria, con lo que en la sopa de partículas aquellas cargadas eléctricamente (electrones y núcleos) se agruparon formando átomos eléctricamente neutros, con lo que el Universo se hizo transparente a la radiación, que ha estado viajando desde entonces y ahora la observamos en longitudes de onda del orden de $1{,}1 \cdot 10^3$ veces mayores que la original, ahora en la región de las microondas (el factor $1{,}1 \cdot 10^3$ es del orden del cociente entre los factores de escala en el momento cosmológico actual y en el momento de la recombinación).

El misterio no acaba aquí: de la fracción de materia, del orden de $\Omega_m \approx 0{,}3$, la materia ordinaria (bariónica, 'visible') que se puede estimar es tan solo del orden de $\Omega_{m_{\text{visible}}} \approx 0{,}04$, lo que hace que una fracción del orden de $\Omega_{m_{\text{oscura}}} \approx 0{,}26$ sea 'materia oscura', esto es, algo con ecuación de estado semejante a la materia ordinaria en tanto $p \approx 0$, pero que no es materia ordinaria en cuanto que aparentemente no interacciona con el campo electromagnético, y por tanto ni emite ni absorbe luz.

La necesidad de que una parte de la materia que causa la gravedad en el Universo sea materia no visible ópticamente sigue del análisis de las curvas de rotación de las galaxias y fue ya adelantada en la década de 1930 por F. Zwicky, quien observó las velocidades de rotación de las galaxias en cúmulos globulares. Los resultados observacionales posteriores confirmaron la previsión de Zwicky.

En el modelo ΛCDM se supone que esta materia oscura es no bariónica (diferente de la materia ordinaria y de naturaleza actualmente incógnita), con unas propiedades bastante diferentes de la ordinaria. Al no emitir ni absorber luz, los intercambios de energía en esa materia apenas existen, lo que implica que se encuentra no termalizada (las únicas interacciones que presumiblemente tiene son la gravitatoria y la nuclear débil). En el modelo ΛCDM se supone que en el momento de la recombinación las velocidades de esta materia eran mucho menores que la de la luz, y por tanto sus energías muy pequeñas; de ahí el calificativo de fría. La distribución espacial necesaria para encajar por ejemplo a las curvas de rotación de las galaxias es muy particular (formando halos). Actualmente la naturaleza de la matera oscura es objeto de intensa investigación.

La nomenclatura que se ha establecido para materia y energía oscura, estos dos constituyentes mayoritarios del Universo según el modelo vigente, es realmente poco afortunada. No debe confundirse materia oscura y energía oscura, que son los nombres dados a dos entidades físicas completamente diferentes. La diferencia esencial entre ellas está contenida en la ecuación de estado: la materia oscura es conjeturalmente materia de origen y naturaleza desconocida, diferente de la materia ordinaria (bariónica) en la propiedad crucial de que tal materia no interacciona con la luz de la manera en que lo hace la materia ordinaria. Excepto esta diferencia fundamental, se cree que la ecuación de estado de la materia oscura debe ser semejante a la de la materia ordinaria, con presión despreciable. No hemos discutido la dinámica de un modelo con materia oscura, que dependerá de la ecuación de estado de esta materia, aunque se cree generalmente que ésta dependencia no sería sustancialmente diferente a la de la materia ordinaria.

Por el contrario, en la energía oscura la ecuación de estado es drásticamente diferente: la presión es negativa y es en valor absoluto igual a la densidad de energía.

5. Apéndice: Todo lo que se necesita saber sobre tensor energía-esfuerzo, símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci, tensor de Einstein, etc. etc. en los modelos cosmológicos de FLRW

5.1. Tensor energía-esfuerzo: un breve resumen

En el contexto de la Relatividad Especial y en un sistema de coordenadas localmente galileano, la relación entre las componentes del tensor de energía-esfuerzos (en su forma natural, 2 veces contravariante) y las cantidades físicas, densidad de energía $\mathcal{E}$, densidad de momento Π^i, flujo de energía S^i y flujo de momentos σ^{ij} está contenida en:

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E} & S^1 & S^2 & S^3 \\ \hline c^2\Pi^1 & c^2\sigma^{11} & c^2\sigma^{12} & c^2\sigma^{13} \\ c^2\Pi^2 & c^2\sigma^{21} & c^2\sigma^{22} & c^2\sigma^{23} \\ c^2\Pi^3 & c^2\sigma^{31} & c^2\sigma^{32} & c^2\sigma^{33} \end{array}\right) \tag{70}$$

- COMENTARIO 10.22. Estamos empleando la elección, bastante frecuente en la literatura, de definir el tensor de esfuerzos de manera que T^{00} sea directamente igual a la densidad de energía $\mathcal{E}$ y no a la 'densidad equivalente de masa' $\mathcal{E}/c^2$, cuyo uso, como hemos indicado ya, es más frecuente en Cosmología teórica; conviene estar advertidos ya que en tal caso aparecerá un factor extra $\frac{1}{c^2}$ en todas las ecuaciones en las que intervenga $T^{\mu\nu}$. Y ya que comentamos esto, también debe tenerse en cuenta que es muy frecuente en la literatura escribir la métrica con un factor extra c^2 con respecto a nuestra elección, de manera que en el espacio de Minkowski la métrica sería $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; esta elección introduce otro factor extra c^2 en todas las ecuaciones que tengan que ver con la métrica. La ecuación de Einstein, escrita con la convención $ds^2 = c^2dt^2 + \ldots$ para la métrica tiene un factor extra c^2 con respecto a la que aparece con la elección $d\tau^2 = dt^2 + \ldots$ y es $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}$

En Relatividad General, cuando las coordenadas escogidas sean localmente galileanas (esto es, una coordenada que sea el tiempo propio de su observador y tres coordenadas espaciales que sean localmente cartesianas en el espacio (localmente) propio del observador) deberemos esperar una interpretación semejante de los elementos del tensor energía-esfuerzo como las cantidades físicas propias en cada suceso. En tales coordenadas, y en el origen de coordenadas espaciales, en donde la métrica se reduce a su forma minkowskiana, el principio cosmológico establece que $\Pi^i = 0$, $S^i = 0$ y $\sigma^{ij} = p\,\delta^{ij}$. Conviene notar que densidad de energía y presión son cantidades con las mismas dimensiones.

La forma de FLRW de la métrica la hemos dado en coordenadas que difieren de unas coordenadas localmente galileanas solamente por el hecho de que las coordenadas espaciales son coordenadas de tipo esférico. Por ello resultará conveniente saber cómo se debería escribir el tensor de energía-esfuerzo en esas coordenadas espaciales.

De nuevo el problema se resuelve recurriendo a la Relatividad Especial. Allí vimos que para un fluido perfecto, con densidad de energía propia $\mathcal{E}$ y presión (isótropa) p no nula (ambas cantidades relativas al sistema en el que el fluido está en reposo), que se mueve con cuadrivelocidad u^μ, el tensor de esfuerzo-energía está dado en cualesquiera coordenadas por la expresión que en su momento derivamos en un ejercicio de un capítulo anterior:

$$T^{\mu\nu} = \Big((\mathcal{E} + p)u^\mu u^\nu - p\,\eta^{\mu\nu}\Big) \tag{71}$$

La misma relación resulta aplicable en nuestro caso, sin más que reemplazar la métrica del espacio de Minkowski por la métrica cosmológica. De manera que en un medio continuo homogéneo e isótropo, con densidad de energía propia $\mathcal{E}$ y presión propia (isótropa) p, en el que la métrica del Espacio tiempo es $g_{\mu\nu}$ deberemos esperar para el tensor energía-esfuerzo la expresión:

$$T^{\mu\nu} = \Big((\mathcal{E} + p)u^\mu u^\nu - p\,g^{\mu\nu}\Big) \tag{72}$$

5.2. Tensor energía-esfuerzo asociado al Principio Cosmológico

En el caso del principio cosmológico, se toma como fuente del campo gravitatorio un fluido perfecto, caracterizado por dos cantidades en cada punto del espacio-tiempo, la densidad propia de energía $\mathcal{E} = c^2\rho$ (donde ρ denota la densidad (propia) de masa equivalente) y la presión isótropa p propia. Sabemos que ambas cantidades van a depender del tiempo cosmológico, aunque a veces omitiremos esta dependencia para no sobrecargar las expresiones.

La fórmula anterior nos permite escribir explícitamente la forma del tensor de energía-esfuerzo correspondiente en coordenadas cosmológicas. La cuadrivelocidad del fluido está dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ en dichas coordenadas cosmológicas (esto es así tanto si las coordenadas espaciales usadas son de tipo 'esférico' χ, θ, ϕ o 'esférico isótropo' o de tipo localmente cartesiano). En consecuencia, se tienen las expresiones siguientes: En coordenadas localmente minkowskianas en torno a un suceso O tomado como origen (con las tres coordenadas espaciales localmente cartesianas), y en el origen de coordenadas:

$$u^\mu u^\nu|_O = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \qquad g^{\mu\nu}|_O = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -c^2 & & \\ & & -c^2 & \\ & & & -c^2 \end{array}\right)$$

$$T^{\mu\nu}|_O = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E} & & & \\ \hline & c^2 p & & \\ & & c^2 p & \\ & & & c^2 p \end{array}\right) \qquad T_{\mu\nu}|_O = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E}(t) & & & \\ \hline & -\frac{1}{c^2}p & & \\ & & -\frac{1}{c^2}p & \\ & & & -\frac{1}{c^2}p \end{array}\right) \tag{73}$$

Nótese que no hemos escrito la expresión de la métrica y del tensor de energía-esfuerzo en tales coordenadas más que en el suceso origen; en todo caso el resultado obtenido, referido a un suceso, coincide con el indicado en el texto principal, (7).

Por el contrario, en el caso de las coordenadas espaciales 'esféricas' de FLRW (t, χ, θ, ϕ) ya conocemos la expresión de la métrica en todo el Espacio-Tiempo, dada por:

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \frac{-1}{c^2}a^2(t) & & \\ & & \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi) & \\ & & & \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta \end{array}\right) \tag{74}$$

de modo que el empleo de (72) nos conduce a las expresiones que se dan en el texto principal, y que son válidas en todo el espacio-tiempo para el tensor métrico en forma contravariante y para el tensor de energía-esfuerzo, que en esas coordenadas son

$$g^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \frac{-c^2}{a^2(t)} & & \\ & & \frac{-c^2}{a^2(t)S_k^2(\chi)} & \\ & & & \frac{-c^2}{a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta} \end{array}\right) \qquad T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E}(t) & & & \\ \hline & -\frac{1}{c^2}\frac{p(t)}{a^2(t)} & & \\ & & -\frac{1}{c^2}\frac{p(t)}{a^2(t)S_k^2(\chi)} & \\ & & & -\frac{1}{c^2}\frac{p(t)}{a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta} \end{array}\right) \tag{75}$$

Así se resuelve la cuestión de escribir el tensor de esfuerzo-energía dado en (7) en las coordenadas (χ, θ, ϕ) 'esféricas' introducidas antes. Recordemos que los valores $\rho(t), p(t)$ de esta densidad de masa y presión son las medidas en el sistema propio, en el que la materia está en reposo, y que son espacialmente constantes pero dependen del tiempo cosmológico.

5.3. Símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci, tensor de Einstein, etc. etc.

Para la métrica dada en (2), con dl_k^2 dado por (3), se puede calcular sucesivamente (las componentes no nulas de) los coeficientes de conexión $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, el tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ y el tensor de Ricci $R_{\nu\beta}$. El texto de Hartle tiene los resultados para el caso $k = 0$; los restantes se pueden hacer con un programa de cálculo simbólico, empleando por ejemplo el cuaderno de Mathematica facilitado en clase. Aquí nos limitamos a dar los asociados a la métrica (2), con dl_k^2 dado por (3) en los tres casos $k = 1, 0, -1$

- EJERCICIO 10.8. Repetir los cálculos análogos con el programa de cálculo simbólico en las coordenadas 'esféricas isótropas' (5)

Empleando las funciones $C_k(\chi), S_k(\chi), T_k(\chi)$ definidas en los casos $k = 1, 0, -1$ por

$$C_k(\chi) = \begin{cases} \cos\chi \\ 1 \\ \cosh\chi \end{cases} \qquad S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi \\ \chi \\ \sinh\chi \end{cases} \qquad T_k(\chi) = \begin{cases} \tan\chi & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \tanh\chi & k = -1 \end{cases} \tag{76}$$

los resultados obtenidos para los símbolos de Christoffel (de segunda especie) $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, la forma natural del tensor de curvatura de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, y las formas 'covariantes' de ambos objetos $\Gamma_{\mu\,\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ se dan en la tabla en la página siguiente (los símbolos no listados son nulos),

Es un ejercicio interesante comparar estos resultados con los correspondientes de Schwarzschild; como el espacio-tiempo cosmológico comparte con el de Schwarzschild la simetría rotacional y las coordenadas espaciales son también de tipo 'esférico' hay semejanzas obvias entre las componentes de los objetos asociadas que resultan especialmente evidentes en aquellas componentes que no involucran al factor de escala. Pero también hay diferencias: hay que recordar que en FLRW la simetría rotacional es alrededor de cualquier punto, no solo como en Schwarzschild, donde el centro es único, y técnicamente la coordenada r de Schwarzschild sea diferente por construcción de la coordenada radial cosmológica χ que hemos escogido aquí.

- COMENTARIO 10.23. Las semejanzas serían un poco más evidentes de haber usado las coordenadas 'esféricas isótropas', aunque esta observación no tiene ningún contenido especial, ya que las coordenadas son irrelevantes para las predicciones de efectos observables (aunque los cálculos necesarios para la predicción puede ser fácil en unas coordenadas y dificil en otras).

A partir de los resultados de la Tabla, se calcula el tensor de Ricci, que resulta ser diagonal

$$R_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} -3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} & & & \\ \hline & \frac{1}{c^2}\{2kc^2+2(\dot{a}(t))^2+a(t)\ddot{a}(t)\} & & \\ & & \frac{1}{c^2}\{2kc^2+2(\dot{a}(t))^2+a(t)\ddot{a}(t)\}S_k^2(\chi) & \\ & & & \frac{1}{c^2}\{2kc^2+2(\dot{a}(t))^2+a(t)\ddot{a}(t)\}S_k^2(\chi)\sin^2\theta \end{array}\right), \tag{77}$$

el tensor de de Einstein, cuya forma $(0, 2)$ contravariante está dada por

$$G^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 3\left\{\frac{kc^2+(\dot{a}(t))^2}{a^2(t)}\right\} & & & \\ \hline & -c^2\left\{\frac{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)}{a^4(t)}\right\} & & \\ & & -c^2\left\{\frac{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)}{a^4(t)}\right\}\frac{1}{S_k^2(\chi)} & \\ & & & -c^2\left\{\frac{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)}{a^4(t)}\right\}\frac{1}{S_k^2(\chi)\sin^2\theta} \end{array}\right) \tag{78}$$

y finalmente la forma completamente covariante del tensor de Einstein

$$
G_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc}
3\left\{\frac{kc^2+(\dot{a}(t))^2}{a^2(t)}\right\} & & & \\
\hline
 & -\frac{1}{c^2}\left\{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)\right\} & & \\
 & & -\frac{1}{c^2}\left\{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)\right\} S_k^2(\chi) & \\
 & & & -\frac{1}{c^2}\left\{kc^2+(\dot{a}(t))^2+2a(t)\ddot{a}(t)\right\} S_k^2(\chi)\sin^2\theta
\end{array}\right) \tag{79}
$$

Al imponer ahora las ecuaciones de Einstein, es evidente que hay solamente dos ecuaciones de Einstein no triviales, ya que imponiendo que $G_{\mu\nu}$ (dado en (79)) y $T_{\mu\nu}$ (dado en (75)) sean proporcionales es manifiesto que los tres elementos diagonales espaciales conducen a la misma ecuación, que combinada con la ecuación que proviene del elemento diagonal temporal dan las dos ecuaciones de Friedmann.

Resumen tabular de objetos asociados a la métrica cosmológica de FLRW. Coordenadas síncronas ‘esféricas’ (t, χ, θ, ϕ)

Métrica $g_{\alpha\beta}$ (los símbolos no listados son nulos):

$$g_{00} = 1, \qquad g_{\chi\chi} = \frac{-1}{c^2} a^2(t), \qquad g_{\theta\theta} = \frac{-1}{c^2} a^2(t) S_k^2(\chi), \qquad g_{\phi\phi} = \frac{-1}{c^2} a^2(t) S_k^2(\chi) \sin^2\theta \tag{80}$$

Símbolos de Christoffel de primera especie $\Gamma_{\mu\ \alpha\beta}$ (los símbolos no listados son nulos):

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_{t\ \chi\chi} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t), & \Gamma_{t\ \theta\theta} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi), & \Gamma_{t\ \phi\phi} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi) \sin^2\theta, \\
\Gamma_{\chi\ \chi t} = \Gamma_{\chi\ t\chi} = -\frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) & \Gamma_{\chi\ \theta\theta} = \frac{1}{c^2} a^2(t) C_k(\chi) S_k(\chi), & \Gamma_{\chi\ \phi\phi} = \frac{1}{c^2} a^2(t) C_k(\chi) S_k(\chi) \sin^2\theta, \\
\Gamma_{\theta\ \theta t} = \Gamma_{\theta\ \chi\theta} = -\frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi) & \Gamma_{\theta\ \theta\chi} = \Gamma_{\theta\ \chi\theta} = -\frac{1}{c^2} a^2(t) C_k(\chi) S_k(\chi), & \Gamma_{\theta\ \phi\phi} = \frac{1}{c^2} a^2(t) S_k^2(\chi) \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta, \\
\Gamma_{\phi\ \phi t} = \Gamma_{\phi\ t\phi} = -\frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi) \sin^2\theta, & \Gamma_{\phi\ \phi\chi} = \Gamma_{\phi\ \chi\phi} = -\frac{1}{c^2} a^2(t) C_k(\chi) S_k(\chi) \,\mathrm{sen}^2\theta, & \Gamma_{\phi\ \phi\theta} = \Gamma_{\phi\ \theta\phi} = -\frac{1}{c^2} a^2(t) S_k^2(\chi) \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta,
\end{array} \tag{81}$$

Símbolos de Christoffel de segunda especie $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ (los símbolos no listados son nulos):

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^{t}{}_{\chi\chi} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t), & \Gamma^{t}{}_{\theta\theta} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi), & \Gamma^{t}{}_{\phi\phi} = \frac{1}{c^2} a(t)\dot{a}(t) S_k^2(\chi) \sin^2\theta, \\
\Gamma^{\chi}{}_{\chi t} = \Gamma^{\chi}{}_{t\chi} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & \Gamma^{\chi}{}_{\theta\theta} = -C_k(\chi) S_k(\chi), & \Gamma^{\chi}{}_{\phi\phi} = -C_k(\chi) S_k(\chi) \sin^2\theta, \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta t} = \Gamma^{\theta}{}_{\chi\theta} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & \Gamma^{\theta}{}_{\theta\chi} = \Gamma^{\theta}{}_{\chi\theta} = \frac{1}{T_k(\chi)}, & \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta, \\
\Gamma^{\phi}{}_{\phi t} = \Gamma^{\phi}{}_{t\phi} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & \Gamma^{\phi}{}_{\phi\chi} = \Gamma^{\phi}{}_{\chi\phi} = \frac{1}{T_k(\chi)}, & \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{1}{\tan\theta},
\end{array} \tag{82}$$

Componentes no nulas del tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$:

$$\begin{array}{lll}
R^{t}{}_{\chi t\chi} = -R^{t}{}_{\chi\chi t} = \frac{1}{c^2} a(t)\ddot{a}(t), & R^{t}{}_{\theta t\theta} = -R^{t}{}_{\theta\theta t} = \frac{1}{c^2} a(t)\ddot{a}(t) S_k^2(\chi), & R^{t}{}_{\phi t\phi} = -R^{t}{}_{\phi\phi t} = \frac{1}{c^2} a(t)\ddot{a}(t) S_k^2(\chi) \sin^2\theta, \\
R^{\chi}{}_{t\chi t} = -R^{\chi}{}_{tt\chi} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} & R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta} = -R^{\chi}{}_{\theta\theta\chi} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\} S_k^2(\chi) & R^{\chi}{}_{\phi\chi\phi} = -R^{\chi}{}_{\phi\phi\chi} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\} S_k^2(\chi) \sin^2\theta, \\
R^{\theta}{}_{t\theta t} = -R^{\theta}{}_{tt\theta} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} & R^{\theta}{}_{\chi\theta\chi} = -R^{\theta}{}_{\chi\chi\theta} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}, & R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = -R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\} S_k^2(\chi) \sin^2\theta, \\
R^{\phi}{}_{t\phi t} = -R^{\phi}{}_{tt\phi} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} & R^{\phi}{}_{\chi\phi\chi} = -R^{\phi}{}_{\chi\chi\phi} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}, & R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = -R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = \left\{k + \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\} S_k^2(\chi),
\end{array} \tag{83}$$

Forma completamente covariante del tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\begin{array}{lll}
R_{t\chi t\chi}=-R_{t\chi\chi t}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t), & R_{t\theta t\theta}=-R_{t\theta\theta t}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t)S_k^2(\chi), & R_{t\phi t\phi}=-R_{t\phi\phi t}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta, \\
R_{\chi t\chi t}=-R_{\chi tt\chi}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t), & R_{\chi\theta\chi\theta}=-R_{\chi\theta\theta\chi}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^2(\chi) & R_{\chi\phi\chi\phi}=-R_{\chi\phi\phi\chi}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^2(\chi)\sin^2\theta, \\
R_{\theta t\theta t}=-R_{\theta tt\theta}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t)S_k^2(\chi), & R_{\theta\chi\theta\chi}=-R_{\theta\chi\chi\theta}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^2(\chi), & R_{\theta\phi\theta\phi}=-R_{\theta\phi\phi\theta}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^4(\chi)\sin^2\theta, \\
R_{\phi t\phi t}=-R_{\phi tt\phi}=\frac{1}{c^2}a(t)\ddot{a}(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta, & R_{\phi\chi\phi\chi}=-R_{\phi\chi\chi\phi}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^2(\chi)\sin^2\theta, & R_{\phi\theta\phi\theta}=-R_{\phi\theta\theta\phi}=\frac{-1}{c^2}a^2(t)\left\{k+\frac{\dot{a}^2(t)}{c^2}\right\}S_k^4(\chi)\sin^2\theta,
\end{array} \tag{84}$$

Componentes no nulas del 'tensor métrico de los bivectores' $g_{\mu\nu\alpha\beta} := g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$ en su forma completamente covariante (los símbolos no listados son nulos):

$$\begin{array}{ll}
g_{\chi t\chi t} = \frac{-1}{c^2}a^2(t), & g_{\theta\phi\theta\phi} = \frac{1}{c^4}a^4(t)S_k^4(\chi)\sin^2\theta \\
g_{\theta t\theta t} = \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi), & g_{\chi\phi\chi\phi} = \frac{1}{c^4}a^4(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta, \\
g_{\phi t\phi t} = \frac{-1}{c^2}a^2(t)S_k^2(\chi)\sin^2\theta & g_{\chi\theta\chi\theta} = \frac{1}{c^4}a^4(t)S_k^2(\chi),
\end{array} \tag{85}$$

De las dos tablas anteriores se derivan las curvaturas seccionales no nulas $K_{(\alpha\beta)} := \frac{R_{\alpha\beta\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta\alpha\beta}}$ de la solución cosmológica de FLRW, que son:

$$\begin{array}{ll}
K_{(t\chi)} = -\dfrac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, & K_{(\theta\phi)} = -\dfrac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \dfrac{kc^2}{a^2(t)}, \\
K_{(t\theta)} = -\dfrac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, & K_{(\chi\phi)} = -\dfrac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \dfrac{kc^2}{a^2(t)}, \\
K_{(t\phi)} = -\dfrac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, & K_{(\chi\theta)} = -\dfrac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \dfrac{kc^2}{a^2(t)},
\end{array} \tag{86}$$